Лекция 11 (27) по функциональному анализу 22 апреля 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 23: Пространства основных и обобщенных функций (продолжение).

Теорема 23.7 (о строении обобщенной функции с носителем в точке). *Пусть дана обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, и $\operatorname{supp} F = \{0\}$. Тогда существует такое $d \in \mathbb{Z}_+$ и такие числа c_α, $|\alpha| \leqslant d$, что*

$$F = \sum_{|\alpha| \leqslant d} c_\alpha D^\alpha \delta.$$

Доказательство.

По лемме 23.8 найдется такое d, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ выполнена оценка

$$|F(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant d} \max_{\|x\| \leqslant 1} |D^\alpha \varphi(x)| \tag{*}$$

с фиксированной постоянной C. Зафиксируем также функцию $\chi \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^m)$, равную единице при $\|x\| \leqslant \frac{1}{2}$ (такая существует по лемме 23.1 (iii)) и положим $\chi_k(x) = \chi(kx)$. Заметим, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ и для любого k выполнено равенство $F(\varphi) = F(\varphi \cdot \chi_k)$, поскольку $\varphi(x) - \varphi(x)\chi_k(x) \equiv 0$ в окрестности нуля.

Введем обозначения $x^\alpha = (x_1)^{\alpha_1} \dots (x_m)^{\alpha_m}$ и $\alpha! = (\alpha_1)! \dots (\alpha_m)!$. Определим c_α из равенств

$$(-1)^{|\alpha|} c_\alpha = F(x^\alpha \cdot \chi(x)) = F(x^\alpha \cdot \chi \cdot \chi_k(x)) = F(x^\alpha \cdot \chi_k(x))$$

(тем самым оно не зависит от k). Согласно формуле Тейлора, всякая $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ представляется в виде

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_d(\varphi, x),$$

где R_d — остаточный член порядка $\|x\|^{d+1}$. Умножая это равенство на χ_k и применяя обобщенную функцию F, получаем, что

$$F(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} \frac{c_\alpha}{\alpha!} (D^\alpha \delta, \varphi) + F(\chi_k(x) \cdot R_d(\varphi, x)).$$

Итак, нам достаточно проверить, что последнее слагаемое стремится к нулю с ростом k. Поскольку формула Тейлора применима не только к φ, но и к ее производным, то для любого α, $|\alpha| \leqslant d$, имеет место оценка $|D^\alpha R_d(\varphi, x)| \leqslant \|x\|^{d+1-|\alpha|}$. В то же время, формула производной произведения дает нам равенство

$$D^\alpha(\chi_k(x) \cdot R_d(\varphi, x)) = \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} c(\alpha, \beta) D^\beta \chi_k(x) \cdot D^{\alpha-\beta} R_d(\varphi, x),$$

где равенство $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ понимается покоординатно, а

$$\max_x |D^\beta \chi_k(x)| = k^{|\beta|} \max_x |D^\beta \chi(x)| = c(\beta) k^{|\beta|}.$$

Учитывая, что функция $\chi_k(x) \cdot R_d(\varphi, x)$ имеет носитель в шаре $\{\|x\| \leqslant \frac{1}{k}\}$, окончательно получаем при $|\alpha| \leqslant d$ оценку

$$\max_x |D^\alpha(\chi_k(x) \cdot R_d(\varphi, x))| \leqslant \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} c(\alpha, \beta) k^{|\beta|} \left(\frac{1}{k}\right)^{d+1-|\alpha|+|\beta|},$$

что вместе с неравенством (*) дает оценку

$$|F(\chi_k(x)\cdot R_d(\varphi,x))|\leqslant \frac{C}{k}\to 0$$

при $k\to\infty$. Но, как мы знаем, левая часть не зависит от k, поэтому она равна нулю. Теорема доказана.

Замечание. Верно и обратное утверждение: всякая функция F указанного в теореме вида имеет носитель, равный $\{0\}$, если только все коэффициенты c_α не равны нулю (тогда носитель пустой).

Тема 24: Преобразование Фурье как оператор на $L_2(\mathbb{R})$ и на $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Напомним, что при рассмотрении преобразования Фурье

$$\hat f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\,dt$$

на $L_1(\mathbb{R})$ были получены следующие результаты:

Следствие. *Пусть функция f дифференцируема $(k-1)$ раз всюду на прямой, ее $(k-1)$-я производная абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке в $\mathbb{R}$, и все функции f, f', ..., $f^{(k)}$ интегрируемы по Лебегу на $\mathbb{R}$. Тогда*
(i) $\widehat{f^{(k)}}(\xi)=(i\xi)^k\widehat{f}(\xi)$.
(ii) $\widehat{f}(\xi)=o(|\xi|^{-k})$ при $|\xi|\to\infty$.

(Следствие из теоремы 14.4.)

Следствие. *Пусть функции $x^jf(x)$, $j=0,\dots,k$, интегрируемы по Лебегу на $\mathbb{R}$. Тогда функция $\widehat{f}$ дифференцируема j раз на $\mathbb{R}$ и $(\widehat{f})^{(j)}(\xi)=(-i)^j\widehat{x^jf}(\xi)$.*

(Следствие из теоремы 14.5.)

Мы видим, что чем выше гладкость функции, тем быстрее убывает ее преобразование Фурье, и чем быстрее убывает функция (хотя бы в среднем), тем выше гладкость ее преобразования Фурье.

Поэтому естественным оказывается следующий результат.

Теорема 24.1. *Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ есть линейный ограниченный оператор на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, удовлетворяющий уравнению $\mathcal{F}^4=I$ (и потому обратимый с ограниченным обратным $\mathcal{F}^3$).*

Доказательство.

Комбинируя приведенные выше следствия, получаем, что для любых целых неотрицательных k и n выполнены равенства

$$\xi^k\widehat{f}^{(n)}(\xi)=\xi^k(-i)^n\widehat{x^nf}(\xi)=(-i)^{n+k}(\widehat{x^nf)^{(k)}}(\xi)=(-i)^{n+k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\mathcal{F}((x^n)^{(j)}f^{(k-j)})(\xi).$$

Поэтому каждая полунорма функции $\mathcal{F}(f)$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ оценивается через конечное число величин вида $\max_\xi |\mathcal{F}(x^k f^{(n)})(\xi)|$. Но

$$|\mathcal{F}(x^k f^{(n)})(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} |x^k f^{(n)}(x)|\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|(1+x^2)x^k f^{(n)}(x)|}{1+x^2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant (p^{\mathcal{S}}_{k,n}(f) + p^{\mathcal{S}}_{k+2,n}(f)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (p^{\mathcal{S}}_{k,n}(f) + p^{\mathcal{S}}_{k+2,n}(f))$$

равномерно по $\xi \in \mathbb{R}$. Итак, любая полунорма функции $\mathcal{F}(f)$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ оценивается через конечное число полунорм функции f в том же пространстве, что и означает ограниченность оператора.

Далее, заметим, что любая дифференцируемая в некоторой точке функция из $L_1(\mathbb{R})$ удовлетворяет в этой точке условию Дини

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|}\,dt < \infty$$

по определению производной. Следовательно, любая функция из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Дини в каждой точке. В силу теоремы 14.2 это означает, что

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Поскольку по доказанному $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, и потому

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Подставляя сюда $(-x)$ вместо x, получаем равенство

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-ix\xi}\,d\xi,$$

которое в силу определения преобразования Фурье означает, что $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}^4 f(x) = f(-(-x)) = f(x)$. Теорема доказана.

Полученная теорема позволяет распространить понятие преобразования Фурье на более широкие пространства, а именно, на $L_2(\mathbb{R})$ и на $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Рассмотрим сначала первое из этих пространств.

Лемма 24.1. *Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (и даже $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) всюду плотно в $L_p(\mathbb{R})$ при $1 \leqslant p < \infty$, причем если функция f лежит одновременно в нескольких пространствах $L_{p_j}(\mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, l$, то можно выбрать последовательность функций $\{f_n\}$ из $\mathcal{S}$, сходящуюся к f в каждом из этих пространств.*

Доказательство.
Пусть $f \in L_p(\mathbb{R})$ (для одного или нескольких p) и задано $\varepsilon > 0$. Найдем такой отрезок $[-N, N]$, что $\|f - f\chi_{[-N,N]}\|_p < \varepsilon$. По аналогии с леммой 11.5 проверяется, что если $\mu X < \infty$ (например, $x = [-N, N]$ с классической мерой) и $p_1 \leqslant p_2$, то $\|f\|_{p_1} \leqslant C\|f\|_{p_2}$. Поэтому достаточно приблизить $f\chi_{[-N,N]}$ элементами $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$ по норме одного из $L_p([-N, N])$ (с наибольшим p).

В доказательстве теоремы 11.4 было показано, что любую функцию $g \in L_p([-N, N])$ можно сколь угодно хорошо по норме приблизить функцией вида

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{B_k}(x),$$

где B_k — элементы некоторого базиса меры. В случае классической меры на отрезке за базис меры можно (по определению измеримого по Лебегу множества) взять кольцо $R(S)$ конечных объединений промежутков. Увеличивая число слагаемых в выражении для h, можно считать, что B_k — интервалы. Выберем h так, чтобы $\|f\chi_{[-N,N]} - h\|_p < \varepsilon$.

Для каждого интервала $B_k = (\alpha_k, \beta_k)$ по лемме 23.1(ii) построим функции $\varphi_{k,j}(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, соответствующие четверке чисел $(\alpha_k, \alpha_k + \frac{\beta_k - \alpha_k}{4j}, \beta_k - \frac{\beta_k - \alpha_k}{4j}, \beta_k)$. Тогда при каждом k по теореме Лебега

$$\|\chi_{B_k} - \varphi_{k,j}\|_p \to 0 \text{ при } j \to +\infty.$$

Положим

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{k,j}(x),$$

тогда по неравенству треугольника

$$\|h - \varphi_j\|_p \to 0 \text{ при } j \to +\infty.$$

Окончательно $\|f - \varphi_j\| < 3\varepsilon$ при достаточно большом j, но $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

Введем обозначение для обратного преобразования Фурье

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx}\, dt.$$

Лемма 24.2. *Пусть две функции f и g таковы, что они сами и их преобразования Фурье лежат в пространстве $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ (в частности, пусть $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$). Тогда*

$$\langle f, \widehat{g} \rangle = \langle \check{f}, g \rangle.$$

Доказательство.
Поскольку к функции $f(x)\overline{g(t)}e^{itx}$ применима теорема Фубини на $\mathbb{R}^2$, то

$$\langle f, \widehat{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \left(\overline{\int\limits_{\mathbb{R}} g(t) e^{-itx}\, dt} \right) dx = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{g(t)} e^{itx}\, d(t, x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\, dx \right) \overline{g(t)}\, dt = \langle \check{f}, g \rangle.$$

Лемма доказана.

Теорема 24.2 (теорема套Планшереля). *На пространстве $L_2(\mathbb{R})$ существует линейный ограниченный оператор $\mathcal{F}$, который:*

(1) является изометрией пространства $L_2(\mathbb{R})$ на себя;

(2) удовлетворяет уравнению $\mathcal{F}^4 = I$, и потому обратным к нему является $\mathcal{F}^3$;

(3) на $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ совпадает с оператором преобразования Фурье;

(4) может быть вычислено как $\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(t)e^{-itx}\,dx$, где предел понимается по норме $L_2(\mathbb{R})$.

Этот оператор обычно тоже называют преобразованием Фурье, или, если нужно уточнить, — оператором преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство.

Пусть функции f и g принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; тогда по теореме 24.1 функция $h = \widehat{f}$ тоже принадлежит этому пространству. Применяя лемму 24.2 к функциям f и h, получаем, что

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle h, \widehat{g} \rangle = \langle \check{h}, g \rangle = \langle \check{\widehat{f}}, g \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Таким образом, если рассмотреть оператор $\mathcal{F}$ на пространстве функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ со скалярным произведением из $L_2(\mathbb{R})$, то он будет сохранять скалярное произведение (а потому и норму, т.е. будет изометрией) и по теореме 24.1 будет взаимно однозначен. Но поскольку $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$ по лемме 24.1, то существует единственное его непрерывное продолжение на всё $L_2(\mathbb{R})$. Проверим, что оно удовлетворяет всем условиям теоремы. В силу непрерывности скалярного произведения продолженное ототбражение (обозначим его той же буквой $\mathcal{F}$) по-прежнему сохраняет норму и скалярное произведение. Поскольку непрерывные операторы $\mathcal{F}^4$ и I совпадают на плотном множестве, то они совпадают всюду; тем самым выполнено (1), а потому и (2).

Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Возьмем последовательность функций f_n из $\mathcal{S}$, которые сходятся к ней одновременно по норме $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$. Обозначая преобразование Фурье в смысле L_1 крышкой и преобразование Фурье в смысле L_2 как оператор $\mathcal{F}$, заметим, что $\mathcal{F}f_n = \widehat{f_n}$ по определению, $\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$ по норме L_2 в силу пункта (1) теоремы и $\widehat{f_n} \rightrightarrows \widehat{f}$ в силу теоремы 14.1. Но если последовательность сходится по норме L_2, то она (в силу неравенства Чебышева) сходится по мере, тогда у нее есть подпоследовательность, сходящаяся почти всюду. Поскольку предел почти всюду совпадает (в смысле L_2) с равномерным пределом, то тем самым $\widehat{f} = \mathcal{F}f$, и мы доказали пункт (3).

Пусть теперь f — некоторая функция из $L_2(\mathbb{R})$, а $f_n = f\chi_{[-n,n]}$. Тогда $\|f - f_n\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$, и в силу пункта (1) имеем $\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_n\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, $f_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, поскольку $L_1([a,b]) \supset L_2([a,b])$ для любого (конечного) отрезка $[a,b]$. В силу пункта (3) имеем

$$\mathcal{F}f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(t)e^{-itx}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-n}^{n} f(t)e^{-itx}\,dt,$$

что и дает нам (4). Теорема доказана.

Полученные результаты позволяют также определить преобразование Фурье для обобщенных функций.

Определение. Пусть F есть обобщенная функция из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Ее преобразованием Фурье называется обобщенная функция $\widehat{F}$, определенная формулой $(\widehat{F}, \varphi) = (F, \widehat{\varphi})$.

Теорема 24.3. *Преобразование Фурье есть корректно определённый линейный непрерывный оператор на $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Если F_f есть регулярная обобщенная функция, задаваемая обычной функцией $f \in L_2(\mathbb{R})$, то $\widehat{F}_f = F_{\widehat{f}}$.*

Доказательство.
Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{\varphi}$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ по теореме 24.1. В силу непрерывности $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ получаем, что $(\widehat{F}, \varphi_n) = (F, \widehat{\varphi}_n) \to (F, \widehat{\varphi}) = (\widehat{F}, \varphi)$, то есть $\widehat{F} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Если $F_n \to F$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, то $(\widehat{F}_n, \varphi) = (F_n, \widehat{\varphi}) \to (F, \widehat{\varphi}) = (\widehat{F}, \varphi)$, то есть $\widehat{F}_n \to \widehat{F}$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, и преобразование Фурье есть непрерывный оператор. Для проверки последнего равенства заметим, что если $f \in L_2$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то, сопоставляя определение F_f с определением скалярного произведения, имеем

$$(F_f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\overline{\varphi(x)}}\,dx = \langle f, \overline{\varphi} \rangle.$$

Далее, для функции из $L_1(\mathbb{R})$, в частности, из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, имеем

$$\overline{\widehat{\varphi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-ixt}\,dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t)} e^{ixt}\,dt = \check{\overline{\varphi}}(x).$$

Тогда с учетом п.(1) теоремы 24.2 имеем

$$(\widehat{F}_f, \varphi) = (F_f, \widehat{\varphi}) = \langle f, \overline{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle f, \check{\overline{\varphi}} \rangle = \langle \widehat{f}, \overline{\varphi} \rangle = (F_{\widehat{f}}, \varphi).$$

Теорема доказана.