Лекция 10 (26) по функциональному анализу 15 апреля 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 23: Пространства основных и обобщенных функций (продолжение).

Замечательное свойство пространств обобщенных функций состоит в том, что на них можно ввести операторы дифференцирования, совпадающие с обычным дифференцированием для гладких функций и непрерывные в этих пространствах (относительно $*$-слабой топологии).

Определение. Оператор $D^j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ дифференцирования по x_j на пространствах $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $S'(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ определяется по формуле

$$(D^j F, \varphi) = -(F, D^j \varphi),$$

где φ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $S(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ соответственно.

Теорема 23.3. *Операторы D^j суть корректно определенные и непрерывные операторы из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $S'(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ в себя, и если $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^m) \cap C^{(1)}(\mathbb{R}^m)$, то $D^j F_f = F_{D^j f}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство.

По определению $D^j F$ есть линейный функционал на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, то $D^j \varphi_n \to D^j \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ по лемме 23.3. Тогда $(D^j F, \varphi_n) \to (D^j F, \varphi)$ в силу непрерывности F, поэтому $D^j F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Если $F_n \to F$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ (т.е. $*$-слабо), то для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$(D^j F_n, \varphi) = -(F_n, D^j \varphi) \to -(F, D^j \varphi) = (D^j F, \varphi),$$

что означает непрерывность оператора. Случаи $S'(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ аналогичны.

Чтобы доказать последнее равенство, заключим носитель функции φ в куб $[-N, N]^m$ и применим теорему Фубини, а затем формулу интегрирования по частям, обозначая через x^* вектор из остальных компонент x, кроме x_j:

$$(D^j F_f, \varphi) = -\int\limits_{[-N,N]^m} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x)\, dx = -\int\limits_{[-N,N]^{m-1}} \left(\int\limits_{-N}^{N} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) dx_j \right) dx^* =$$

$$= \int\limits_{[-N,N]^{m-1}} \left(\int\limits_{-N}^{N} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \Big) \varphi(x) dx_j \right) dx^* = \int\limits_{[-N,N]^m} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \Big) \varphi(x)\, dx.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Произвольный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами непрерывен в пространствах $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $S'(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$.*

Следствие получается из теоремы по индукции.

Определение. Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда их произведением называется обобщенная функция aF, действующая по формуле $(aF, \varphi) = (F, a\varphi)$.

Лемма 23.6. *Для любой бесконечно гладкой функции a оператор умножения на нее есть корректно определенный линейный непрерывный оператор из $D'(\mathbb{R}^m)$ в себя, и если $f \in L_{1,loc}$, то $aF_f = F_{af}$.*

Доказательство.

Поскольку оператор умножения на бесконечно гладкую функцию непрерывен в $\mathcal{D}$, то $a\varphi \in \mathcal{D}$, и если $\varphi_n \to \varphi$, то $a\varphi_n \to a\varphi$. Поэтому $aF \in \mathcal{D}'$. Если $F_n \to F$ в $\mathcal{D}'$ (т.е. $*$-слабо), то для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(aF_n, \varphi) = (F_n, a\varphi) \to (F, a\varphi) = (aF, \varphi),$$

что означает непрерывность оператора. Наконец, в случае регулярной F имеет место равенство

$$(aF_f, \varphi) = (F_f, a\varphi) = \int f(x)\big(a(x)\varphi(x)\big)\,dx = \int \big(a(x)f(x)\big)\varphi(x)\,dx = (F_{af}, \varphi).$$

Лемма доказана.

Следствие. *Произвольный дифференциальный оператор с бесконечно гладкими коэффициентами непрерывен в пространстве* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Итак, пространства обобщенных функций позволяют (сколько угодно раз) дифференцировать «обычные» (локально интегрируемые) и обобщенные функции. Обсудим теперь возможность обратной операции — нахождения первообразной. Ограничимся для простоты случаем $m = 1$.

Лемма 23.7. *Пусть* $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *и* $F' = 0$. *Тогда* F *есть константа, т.е. регулярная функция, заданной локальной интегрируемой функцией* $f(x) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство.

Пусть функция F обладает указанными свойствами. Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ выполнено условие $-(F', \varphi) = (F, \varphi') = 0$. Итак, если основная функция ψ есть производная некоторой другой основной функции φ, то $(F, \psi) = 0$. У гладкой функции ψ всегда есть первообразная, и она тоже гладкая, но нужно проверить, будет ли она финитной. Условие $\psi = \varphi'$ равносильно условию $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} \psi(s)\,ds$, откуда видно, что для финитности φ необходимо и достаточно, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,ds = 0$. Возьмем теперь некоторую фиксированную $\varphi_0 \in \mathcal{D}$, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(s)\,ds = 1$ (такая существует по лемме 23.1(i)). Тогда произвольная $\varphi \in \mathcal{D}'$ представляется в виде

$$\varphi(t) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,ds\right)\varphi_0(t) + \left(\varphi(t) - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,ds\right)\varphi_0(t)\right) = (1, \varphi)\varphi_0(t) + \psi_\varphi(t),$$

где через (c, φ) мы обозначаем действие регулярной функции — константы. Заметим, что $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varphi(s)\,ds = 0$ по линейности интеграла. Применяя функционал F, получаем, что

$$(F, \varphi) = (1, \varphi)(F, \varphi_0) + (F, \psi_\varphi) = (C, \varphi) + 0,$$

где $C = (F, \varphi_0)$ — число. Лемма доказана.

Теорема 23.4. *Для любой обобщенной функции* $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *существует такая обобщенная функция* F, *что* $F' = G$. *Две обобщенные функции, производные которых равны, отличаются на регулярную функцию — константу.*

Доказательство.
Вторая часть немедленно следует из предыдущей леммы. Докажем существование. Как и в доказательстве леммы, возьмем фиксированную $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(s)\,ds = 1$, и сопоставим каждой φ функцию $\psi_\varphi(t) = \varphi(t) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,ds\right)\varphi_0(t)$. Затем введем функции

$$\Psi_\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} (-\psi_\varphi(\tau))\,d\tau.$$

Они лежат в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_\varphi(t)\,dt = 0.$$

Заметим, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ выполнено равенство

$$-\Psi_{\varphi'}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Big(\varphi'(\tau) - \big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(s)\,ds\big)\varphi_0(\tau)\Big)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi'(\tau)\,d\tau = \varphi(t).$$

Определим теперь линейный функционал F формулой $(F,\varphi) := (G, \Psi_\varphi)$. Тогда

$$(F',\varphi) = (F, -\varphi') = (G, -\Psi_{\varphi'}) = (G,\varphi),$$

т.е. $F' = G$. Для завершения доказательства осталось проверить, что функционал F непрерывен, а для этого достаточно проверить, что линейный оператор $\varphi \mapsto \Psi_\varphi$ непрерывен в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Но если $\varphi_j \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $\operatorname{supp}\psi_{\varphi_j} \subset \operatorname{supp}\varphi_j \cup \operatorname{supp}\varphi_0$, так что есть некоторое $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$, в котором они все лежат, и $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(t) \to 0$, откуда ψ_{φ_j} имеют общий носитель и при всех k

$$\psi_{\varphi_j}{}^{(k)}(t) = \varphi_j^{(k)}(t) - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(s)\,ds\right)\varphi_0{}^{(k)}(t) \rightrightarrows 0.$$

Тогда и Ψ_{φ_j} сходятся к нулю - они лежат в $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$ (носитель может быть больше, см. лемму 23.1 (ii)), и $\max_{\mathbb{R}} \Psi_{\varphi_j} \leqslant 2N \max \psi_{\varphi_j} \to 0$, а k-е производные Ψ_{φ_j} сходится к нулю равномерно, потому что они суть $(k-1)$-е производные ψ_{φ_j}. Теорема доказана.

Носители обобщенных функций

Хотя нерегулярная обобщенная функция не является функцией на $\mathbb{R}^m$ и говорить о ее значении в конкретной точке x нельзя, можно тем не менее корректно определить, что такое носитель обобщенной функции и применять это понятие.

Определение. Обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ *равна нулю на открытом множестве* $G \subset \mathbb{R}^m$, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющей условию $\operatorname{supp}\varphi \subset G$, выполнено равенство $(F,\varphi) = 0$.

Например, регулярная функция F_f равна нулю на открытом множестве G, если определяющая ее локально интегрируемая функция f равна там нулю почти всюду.

Теорема 23.5 (о разбиении единицы). *Если компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ покрыт открытыми множествами $\{G_k\}_{k=1}^n$, то существуют такие $\chi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, что $\operatorname{supp}\chi_k \subset G_k$ и $\sum_{k=1}^n \chi_k(x) \equiv 1$ на K.*

Доказательство.

Вначале покажем, что если K — компакт, лежащий в открытом множестве G, то существует функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, равная единице на K и нулю вне G. Если G — открытый шар, а K — концентрический с ним замкнутый шар меньшего радиуса, то утверждение уже получено в лемме 23.1 (iii). В общем случае, пусть $\delta = \operatorname{dist}(K, \partial G)$; это положительное число по условию. Покроем K шарами $\{B_{\delta/3}(x)\}_{x \in K}$ и выберем конечное подпокрытие $\{U_k\}_{k=1}^n$. Через V_k обозначим шар с тем же центром и радиусом $2\delta/3$. Тогда по построению

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k \subset \bigcup_{k=1}^n \overline{U}_k \subset \bigcup_{k=1}^n V_k \subset G.$$

Пусть $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $\varphi_k \equiv 1$ на $\overline{U}_k$ и $\varphi_k \equiv 0$ вне V_k. Тогда функция

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \varphi_k(x))$$

и будет искомой — в каждой точке из K хотя бы один сомножитель равен нулю, и функция равна единице, а вне G все сомножители равны единице, и функция равна нулю.

Затем докажем следующий факт из топологии: если компакт K покрыт открытыми множествами G_k, то найдутся такие открытые G'_k, что $G'_k \Subset G_k$ и $K \subset \bigcup_{k=1}^n G'_k$. Ясно, что достаточно предъявить G'_1, остальные найдутся по индукции. Положим $K' = K \setminus \bigcup_{k=2}^n G_k$; тогда K' — замкнутое множество, вложенное в G_1, поэтому $\delta = \operatorname{dist}(K', \partial G_1) > 0$. Тогда $G'_1 = \bigcup_{x \in K'} B_{\delta/2}(x)$ — искомое.

Теперь докажем непосредственно утверждение теоремы. Пусть G_k — покрытие K из условия теоремы, а G'_k — покрытие K меньшими множествами, построенное только что. Возьмем за ψ_k бесконечно гладкую функцию, равную единице на $\overline{G'_k}$ и нулю вне G_k, существование которой установлено на первом шаге доказательства. Функция $\psi(x) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x)$ — бесконечно гладкая и строго положительна ($\psi(x) \geqslant 1$) на множестве $G' = \bigcup_{k=1}^n G'_k$, а стало быть, и в некоторой его окрестности.

Возьмем еще функцию $\chi(x)$, равную единице на K и нулю вне G', и положим

$$\chi_k(x) = \begin{cases} \chi(x)\psi_k(x)/\psi(x), & x \in G'; \\ 0, & x \notin G'. \end{cases}$$

Эти функции гладкие (проблем с делением на нуль нет, т.к. $\psi(x)$ отлична от нуля в окрестности G'); $\operatorname{supp} \chi_k \subset \operatorname{supp} \psi_k \subset G_k$; на компакте K по построению $\sum_{k=1}^n \chi_k \equiv 1$. Теорема доказана.

Следствие. *Если обобщенная функция F равна нулю на каждом из открытых множеств G_α, то она равна нулю на их объединении.*

Доказательство.

Пусть $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ с носителем $K \subset G$. В силу компактности K можно выделить конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$. Для этого покрытия по теореме 23.5 построим разбиение единицы $\{\chi_k\}_{k=1}^n$. Тогда $\varphi(x) =$

$\sum_{k=1}^{n} \varphi(x)\chi_k(x)$, где $\operatorname{supp}(\varphi\chi_k) \subset G_{\alpha_k}$, и потому $F(\varphi\chi_k) = 0$. Тогда по линейности $F(\varphi) = 0$. Следствие доказано.

Определение. Носителем обобщенной функции F называется дополнение в $\mathbb{R}^m$ к объединению всех открытых множеств, на которых $F = 0$.

Следствие из теоремы о разбиении единицы позволяет дать эквивалентное определение: носитель есть дополнение к максимальному открытому множеству, на котором обобщенная функция равна нулю.

Если носитель обобщенной функции не очень велик, то функция допускает относительно простое описание. Особенно просто устроена функция, носитель которой состоит из одной точки. К доказательству этих результатов мы и переходим.

Лемма 23.8. *Пусть обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ имеет компактный носитель $K \subset \{x : \|x\| < N\}$. Тогда найдутся такие числа $C = C(F)$ и $d = d(F)$, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ (независимо от ее носителя) выполнена оценка*

$$|F(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant d} \max_{\|x\| \leqslant N} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Доказательство.
Существует такое $\varepsilon > 0$, что носитель F лежит в шаре $\{\|x\| \leqslant N - 3\varepsilon\}$. Пользуясь леммой 23.1 (iii), возьмем такую функцию $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, которая равна единице при $\|x\| \leqslant N - 2\varepsilon$ и нулю при $\|x\| \geqslant N - \varepsilon$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ носитель $\varphi(x)(1 - \chi(x))$ лежит во внешности K, и потому $F((1 - \chi) \cdot \varphi) = 0$, т.е. $F(\varphi) = F(\varphi \cdot \chi)$ Но для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ выполнено условие $\varphi \cdot \chi \in \mathcal{D}_N(\mathbb{R}^m)$. По теореме 23.2 сужение F на $\mathcal{D}_N(\mathbb{R}^m)$ есть ограниченный линейный оператор, т.е. существуют такие C_1 и d, что

$$|F(\varphi)| = |F(\varphi \cdot \chi)| \leqslant C_1 \sum_{|\alpha| \leqslant d} \max_x |D^\alpha (\varphi(x)\chi(x))|.$$

Раскрывая каждое слагаемое в правой части по формуле Лейбница для производной произведения, получаем утверждение леммы.

Теорема 23.5 (о строении обобщенной функции с компактным носителем). *Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ и $\operatorname{supp} F = K$ — компактное множество. Тогда существуют такая непрерывная функция $g(x)$ и индекс $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$, что $F = D^\beta F_g$.*

Доказательство.
Пусть для определенности носитель F лежит в шаре $\{\|x\| \leqslant 1\}$. Пользуясь предыдущей леммой, найдем такие C и d, что

$$|F(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant d} \max_{\|x\| \leqslant 1} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Возьмем $\varphi \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^m)$. Заметим, что для любого мультииндекса α по формуле Ньютона — Лейбница

$$D^\alpha \varphi(x) = \int_{-1}^{x_j} D^{\alpha + e_j} \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_m)\, dy_j,$$

что дает оценку

$$\max_{\|x\|\leqslant 1} |D^\alpha \varphi(x)| \leqslant 2 \max_{\|x\|\leqslant 1} |D^{\alpha+e_j} \varphi(x)|.$$

По индукции получаем отсюда, что, увеличивая константу C, можно прийти к оценке

$$|F(\varphi)| \leqslant C \max_{\|x\|\leqslant 1} |D^{d,\dots,d} \varphi(x)|.$$

Вновь применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем, что

$$|F(\varphi)| \leqslant C \max_{\|x\|\leqslant 1} \int\limits_{-1}^{x_1} \cdots \int\limits_{-1}^{x_m} D^{d+1,\dots,d+1} \varphi(y)\, dy_1 \dots dy_m \leqslant$$

$$\leqslant C \|D^{d+1,\dots,d+1} \varphi\|_{L_1} \leqslant C' \|D^{d+1,\dots,d+1} \varphi\|_{L_2}.$$

Пусть H_0 — подпространство в $L_2(\{\|x\| \leqslant 1\})$, состоящее из производных $D^{d+1,\dots,d+1}\varphi$ функций $\varphi \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R}^m)$. Тогда $G(D^{d+1,\dots,d+1}\varphi) := F(\varphi)$ по доказанному есть ограниченный (в норме евклидова пространства) функционал на H_0, стало быть, по следствию из теоремы Хана — Банаха он допускает продолжение до линейного непрерывного функционала на $L_2(\mathbb{R}^m)$. Этот функционал по теореме Рисса задается некоторой функцией $\bar h \in L_2(\mathbb{R}^m)$ в виде $G(\psi) = \langle \psi, \bar h \rangle = (\psi, h)$. Тогда

$$F(\varphi) = \int \cdots \int (D^{d+1,\dots,d+1} \varphi(x)) h(x)\, dx.$$

Полагая

$$g(x) = \int\limits_{-1}^{x_1} \cdots \int\limits_{-1}^{x_m} h(y)\, dy_1 \dots dy_m$$

и интегрируя по частям по каждой переменной по очереди, получаем, что функция g непрерывна и

$$F(\varphi) = \int \cdots \int (D^{d+2,\dots,d+2} \varphi(x)) g(x)\, dx,$$

что по определению обобщенной производной дает нам равенство

$$F(\varphi) = (-1)^{m(d+2)} D^{d+2,\dots,d+2} F_g(\varphi).$$

Теорема доказана.