Лекция 9 (25) по функциональному анализу 8 апреля 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 22: Полинормированные пространства (дополнение).

Опишем сходимость последовательностей в полинормированном пространстве.

Лемма 22.2. *Пусть E — полинормированное пространство с системой полунорм $\{p_\alpha\}$. Последовательность $\{x_n\}$ элементов E сходится к $x \in E$ в смысле топологии тогда и только тогда, когда при всех α выполнено $p_\alpha(x_n - x) \to 0$, т.е. когда она сходится по каждой полунорме.*

Доказательство.

Пусть $x_n \to x$ в топологическом смысле. Тогда для любой окрестности U точки x, в частности, для шара $U_\varepsilon^\alpha(x)$ с любом радиусом $\varepsilon > 0$ по любой полунорме p_α, найдётся такое N, что при $n > N$ имеем $x_n \in U$. В частности, для шара получаем, что $p_\alpha(x_n - x) < \varepsilon$, т.е. что $p_\alpha(x_n - x) \to 0$.

Обратно, пусть последовательность сходится по каждой полунорме. Возьмем произвольный шар $U_\varepsilon^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(x)$. Для $k = 1, \dots, m$ найдутся такие N_k, что $p_{\alpha_k}(x_n - x) < \varepsilon$ при $n > N_k$. Тогда при $N > \max_{k=1,\dots,m} N_k$ по определению имеем $x_n \in U_\varepsilon^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}(x)$. Лемма доказана.

Примеры полинормированных пространств.

1. Любое нормированное пространство можно рассматривать как полинормированное с системой из одной полунормы – нормы.

2. На пространствах последовательностей можно ввести систему полунорм $\{p_n(x) = |x_n|\}_{n=1}^\infty$. Сходимость по этой системе полунорм — покоординатная.

3. На пространствах функций, заданных на множестве A, можно ввести систему полунорм $\{p_t(x) = |x(t)|\}_{t\in A}$. Сходимость по этой системе полунорм — поточечная. В частности, если E — нормированное пространство, а в качестве пространства функций берется пространство линейных непрерывных функционалов, то сходимость по полученной системе полунорм есть $*$-слабая сходимость. Топология, заданная на E^* этой системой полунорм, называется $*$-слабой.

4. На нормированном пространстве E система полунорм $\{p_f(x) = |f(x)|\}_{f\in E^*}$ задаёт слабую топологию, сходимость по которой совпадает со слабой сходимостью.

5. Еслим D — область в комплексной плоскости, $\{K_n\}$ — её исчерпание компактами, то полунормы $\{p_n(f) = \max_{K_n} |f(x)|\}$ определяют на пространстве голоморфных в D функций топологию, сходимость по которой есть равномерная сходимость внутри области.

Третий пример допускает обобщение на сами полинормированные пространства. Если E — полинормированное пространство, то сопряженным к нему пространством E^*, как и в нормированном случае, называется пространство линейных непрерывных функционалов на нем с поточечными линейными операциями.

Определение. Пусть E — полинормированное пространство. $*$-слабой топологией на E^* называется топология, заданная системой полунорм $\{p_x(f) = |f(x)|\}_{x\in E}$.

Таким образом, мы вновь получаем полинормированное пространство.

Получим для полинормированных пространств аналог леммы о невырожденности сопряженного пространства.

Лемма 22.3. *Пусть E — хаусдорфово полинормированное пространство. Тогда для любого $x \in E$, $x \neq 0$ существует $f \in E^*$, для которого $f(x) \neq 0$.*

Доказательство.

Зафиксируем $x \in E$, $x \neq 0$. По лемме 22.1 существует α, для которого соответствующая полунорма $p_\alpha(x)$ не равна нулю. Пусть E_0 — одномерное пространство, натянутое на x. Введем на нем линейный функционал $f_0(tx) = t$. Тогда $f_0(x) = 1$ и $|f_0(tx)| = |t| \leqslant \frac{1}{p_\alpha(x)} p_\alpha(tx)$. Применяя теорему Хана — Банаха, получаем, что существует линейный функционал f, удовлетворяющий всюду на E оценке $|f(y)| \leqslant \frac{1}{p_\alpha(x)} p_\alpha(y)$, равный единице на элементе x. По теореме 22.1 этот функционал непрерывен. Лемма доказана.

Тема 23: Пространства основных и обобщенных функций (продолжение).

Определение. Последовательность функций $\{\varphi_n\}$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *стандартно сходится* в $\mathcal{D}$ к функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, если

(1) Существует компакт $K \subset \mathbb{R}^m$, содержащий носители всех φ_n (его для краткости иногда называют «общий носитель последовательности»).

(2) Функции φ_n сходятся к φ по каждой из полунорм $p^{\mathcal{D}}_\alpha$.

Мы сейчас предъявим систему полунорм, описывающую эту сходимость.

Определение. Полунорма p на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ называется *допустимой*, если для любого N найдутся такие постоянные $C(N)$ и $d(N)$, что для всех функций $\varphi \in \mathcal{D}_N(\mathbb{R}^m)$ выполняется оценка

$$p(\varphi) \leqslant C(N) \sum_{\alpha\,:\,|\alpha|\leqslant d(N)} p^{\mathcal{D}}_\alpha(\varphi). \tag{*}$$

В частности, полунормы $p^{\mathcal{D}}_\alpha$ — допустимые с $C(N) = 1$ и $d(N) = |\alpha|$ независимо от N.

За топологию в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ мы примем топологию, которая задается системой всех допустимых полунорм. В принципе, из этой системы можно выделить эквивалентную подсистему мощности континуума, но для приложений нам будет достаточно доказать несколько утверждений, позволяющих вообще не интересоваться конкретным устройством системы полунорм и при этом пользоваться тем, что такая система существует.

Теорема 23.1. *Последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ сходится стандартно тогда и только тогда, когда она сходится по любой допустимой полунорме.*

Доказательство.

Пусть вначале $\varphi_n \to \varphi$ стандартно. Тогда есть компакт K, содержащий носители всех φ_n, и в силу сходимости по полунорме $p^{\mathcal{D}}_{0,\dots,0}$, т.е. равномерной сходимости, этот компакт содержит и носитель φ. Тогда, в силу ограниченности компакта K, найдется N, для которого и φ, и все φ_n принадлежат пространству $\mathcal{D}_N$. Возьмем произвольную допустимую полунорму φ. Применяя для этого N оценку (*) и условие (2) стандартной сходимости, получаем, что

$$p(\varphi_n - \varphi) \leqslant C(N) \sum_{\alpha\,:\,|\alpha|\leqslant d(N)} p_\alpha^{\mathcal{D}}(\varphi_n - \varphi) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Пусть теперь $\varphi_n \to \varphi_0$ по каждой допустимой полунорме. Поскольку любая полунорма $p_\alpha^{\mathcal{D}}$ допустима, то условие (2) стандартной сходимости заведомо выполнено, и нам остается проверить, что последовательность имеет общий носитель. Предположим, что общего носителя нет. Тогда существуют такие последовательности $\{n_k\}$, $\{x_k\}$ и $\{c_k\}$, что $\|x_k\| \uparrow \infty$, $n_k \uparrow \infty$ и $\varphi_{n_k}(x_k) = c_k \neq 0$. Можно считать $\|x_1\|$ столь большим, что $\varphi_0(x_k) = 0$ при всех k. Рассмотрим на $\mathcal{D}$ функцию $p(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k|\varphi(x_k)|}{|c_k|}$. Для любой фиксированной $\varphi \in \mathcal{D}$ ряд содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых и потому сходится. Нетрудно также видеть, что p — полунорма на $\mathcal{D}$. Проверим ее допустимость. Действительно, если задано $N \in \mathbb{N}$, то, полагая $L = L(N) = \max\{k : \|x_k\| \leqslant N\}$, получаем, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}_N$ выполняется оценка

$$p(\varphi) = \sum_{k=1}^{L(N)} \frac{k|\varphi(x_k)|}{|c_k|} \leqslant \frac{(L(N))^2}{\min_{k=1,\dots,L(N)} |c_k|} p_{0,\dots,0}^{\mathcal{D}}(\varphi),$$

что и означает допустимость. Но по построению

$$p(\varphi_{n_k} - \varphi_0) = p(\varphi_{n_k}) \geqslant \frac{k|\varphi_{n_k}(x_k)|}{|c_k|} = k \to \infty.$$

Итак, мы построили допустимую полунорму, по которой последовательность не сходится. Теорема доказана.

Покажем, что стандартная сходимость не может быть задана метрикой, поэтому задающая её система полунорм заведомо не может быть счетной.

Лемма 23.2. *На пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ не существует метрики, сходимость по которой совпадала бы со стандартной сходимостью.*

Доказательство.

Предположим, что такая метрика ρ существует. Пусть φ — функция, построенная в лемме 23.1 (i). Положим $\varphi_{n,k}(x) = \frac{1}{k}\varphi(\frac{x}{n})$. Тогда $\operatorname{supp}\varphi_{n,k} = [-n, n]$. При фиксированном n для любого j имеем

$$\max_{\mathbb{R}} |\varphi_{n,k}^{(j)}(x)| = \frac{1}{k} \max_{\mathbb{R}} |\varphi_{n,1}^{(j)}(x)| \to 0$$

при $k \to \infty$. По предположению $\rho(\varphi_{n,k}, 0) \to 0$ при $k \to \infty$. Выберем такое k_n, что $\rho(\varphi_{n,k_n}, 0) < \frac{1}{n}$. Тогда последовательность $\{\varphi_{n,k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю по метрике, следовательно, должна сходиться стандартно. Однако у неё нет общего носителя. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Есть и другие системы полунорм, задающие стандартную сходимость, но система всех допустимых полунорм (и ей эквивалентые) обладает следующим важным свойством.

Напомним, что если A — отображение метрического пространства (вообще, пространства со счетной локальной базой) M в топологическое пространство X, то его непрерывность эквивалентна его секвенциальной непрерывности. Оказывается, что, хотя пространство $\mathcal{D}$ не обладает счетной локальной базой, но для линейных (!) его отображений в другие пространства такая эквивалентность имеет место.

Теорема 23.2. *Пусть A — линейное отображение пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ в некоторое полинормированное пространство E. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) A непрерывно (ограничено);

(2) A секвенциально непрерывно (если $x_n \to x$, то $Ax_n \to Ax$).

(3) Для каждого N сужение A на $\mathcal{D}_N$ непрерывно (ограничено);

Доказательство.

(1) $\to$ (2): Это верно для любого отображения топологических пространств.

(2) $\to$ (3): Заметим, что оператор вложения $I_N : \mathcal{D}_N \to \mathcal{D}$ ограничен; фактически это определение допустимой полунормы. Но сужение A на $\mathcal{D}_N$ есть $A \circ I_N$, Тогда из секвенциальной непрерывности A следует секвенциальная непрерывность всех сужений. Но система полунорм в $\mathcal{D}_N$ счетна, а топология $\mathcal{D}_N$ хаусдорфова (если $\varphi \not\equiv 0$, то $p_0^{\mathcal{D}}(\varphi) \neq 0$). По теореме 22.3 топология $\mathcal{D}_N$ задается метрикой, стало быть, из секвенциальной непрерывности сужений следует их топологическая непрерывность.

(3) $\to$ (1): Пусть q — некоторая полунорма в пространстве E. Непрерывность сужений на $\mathcal{D}_N$ означает, что для любого N найдутся такие C_N и $\alpha_{N,k}$, что для всякой $\varphi \in \mathcal{D}_N$ выполнена оценка

$$q(A\varphi) \leqslant C(N) \max_{k=1,\dots,k_N} p^{\mathcal{D}}_{\alpha_{N,k}}(\varphi).$$

Величина $p(\varphi) := q(A\varphi)$ является полунормой на $\mathcal{D}$, а предыдущая оценка показывает, что она — допустимая. Тогда оператор A ограничен по определению. Теорема доказана.

Важным примером непрерывных операторов на пространствах основных функций являются операторы дифференцирования.

Лемма 23.3. *Операторы дифференцирования $D^j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ непрерывны в пространствах $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{D}_N(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство.

Пусть $\alpha + e_j$ — мультииндекс, отличающийся от α прибавлением единицы к α_j. Тогда определение соответствующих полунорм дает нам равенства

$$p^{\mathcal{E}}_\alpha(D^j\varphi) = p^{\mathcal{E}}_{\alpha+e_j}(\varphi), \quad p^{\mathcal{S}}_\alpha(D^j\varphi) = p^{\mathcal{S}}_{\alpha+e_j}(\varphi), \quad p^{\mathcal{D}}_\alpha(D^j\varphi) = p^{\mathcal{D}}_{\alpha+e_j}(\varphi). \qquad (**)$$

Тем самым первые три утверждения верны. Для доказательства последнего заметим, что $\operatorname{supp} D^j\varphi \subset \operatorname{supp}\varphi$, так что если последовательность $\{\varphi_n\}$ классически сходится, то последовательность $\{D^j\varphi_n\}_n$ тем более имеет общий носитель. Второе условие классической сходимости для $\{D^j\varphi_n\}_n$ получается из третьего из равенств (**). Лемма доказана.

Следствие. *Произвольный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами непрерывен в пространствах $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{D}_N(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.*

Несложно также проверить, пользуясь формулой Лейбница для производной произведения, что оператор умножения на бесконечно гладкую функцию непрерывен в этих пространствах. Как следствие, дифференциальный оператор с непостоянными, но бесконечно гладкими коэффициентами тоже непрерывен.

Пространства обобщенных функций

Определение. Пространствами обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$, называются пространства линейных непрерывных функционалов на пространствах основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ соответственно, снабженные $*$-слабой топологией.

Иногда нам будет удобнее использовать для обобщенной функции не обозначение $F(\varphi)$, а (F, φ).

Прежде чем изучать свойства этих пространств, обсудим, какое отношение эти функционалы имеют к обычным функциям.

Определение. Измеримая на $\mathbb{R}^m$ функция f называется *локально интегрируемой* по Лебегу, если для любого N она интегрируема по Лебегу на шаре $\{\|x\| \leqslant N\}$ относительно классической меры Лебега (это равносильно тому, что она интегрируема на любом ограниченном измеримом множестве). Например, этим свойством обладает любая непрерывная функция на $\mathbb{R}^m$, с любым поведением на бесконечности. Множество таких функций, факторизованное по совпадению почти всюду, будем обозначать через $L_{1,loc}(\mathbb{R}^m)$.

Лемма 23.4. *Если $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^m)$, то отображение*

$$F_f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\,dx$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Если $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^m)$ и $F_f(\varphi) = F_g(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, то $f = g$ (в смысле совпадения п.в.).

Доказательство.
При любом фиксированном N для каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}_N(\mathbb{R}^m)$ по элементарным свойствам интеграла Лебега выполнена оценка

$$|F_f(\varphi)| = \left| \int\limits_{\|x\|\leqslant N} f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{\|x\|\leqslant N} |f(x)|\,dx \cdot \max_{\|x\|\leqslant N} |\varphi(x)| = C(f, N)p^{\mathcal{D}}_{0,\dots,0}(\varphi).$$

Это означает, что интеграл сходится, тем самым F_f — линейный функционал, и сужение F_f на каждое $\mathcal{D}_N$ ограничено. По теореме 23.2 получаем, что $F_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Предположим теперь, что f и g — две не эквивалентные локально интегрируемые функции. Обозначим через $h(x)$ их разность. Пользуясь свойствами интеграла Лебега, найдем сначала ограниченное множество E, для которого $\int_E h(x)\,d\mu \neq 0$, а затем — параллелепипед I с тем же свойством. Для параллелепипед I найдутся такие функции $\varphi_n \in \mathcal{D}$, которые неотрицательны, сходятся к индикатору χ_I почти всюду и мажорируются этим индикатором. Действительно, в случае $m = 1$, $I = [a, b]$ берем просто функции из леммы 23.1(i), равные единице на $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ и нулю вне $[a, b]$, а при $m > 1$ можно взять произведения таких функций, построенных для каждого ребра параллелепипед. Тогда по теореме Лебега о предельном переходе получаем, что

$$F_h(\varphi_n) = \int\limits_I h(x)\varphi_n(x)\,dx \to \int\limits_I h(x)\,dx \neq 0.$$

Тогда при достаточно большом n выполнено условие $F_h(\varphi_n) \neq 0$, т.е. $F_f(\varphi_n) \neq F_g(\varphi_n)$. Лемма доказана.

Определение. Обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'$ называется *регулярной*, если она представляется в виде $F = F_f$ для некоторой $f \in L_{1,loc}$, и *сингулярной*, если такое представление невозможно.

Простейшим примером сингулярной функции является дельта-функция $\delta(\varphi) = \varphi(0)$. Отметим также, что регулярная обобщенная функция не требует для оценки своей ограниченности полунорм φ, использующих производные; поэтому обобщенная функция, для оценки которой эти полунормы необходимы (!), автоматически будет сингулярной.

Лемма 23.5. *Дельта-функция $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ является сингулярной обобщенной функцией на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Доказательство.
Очевидно, что δ — линейный функционал на $\mathcal{D}$. Из оценки

$$|\delta(\varphi)| \leqslant p_0^{\mathcal{D}}(\varphi) = \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

следует её непрерывность. Предположим, что она регулярна, т.е нашлась такая $f \in L_{1,loc}$, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,d\mu = \varphi(0).$$

Возьмем функцию φ, построенную в лемме 23.1 (i), и пусть $\varphi_n(x) = e \cdot \varphi(nx)$. Тогда $\varphi_n(0) = 1$, $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$ и $\operatorname{supp}\varphi_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |f(x)|\,d\mu \to 0$$

при $n \to \infty$, и при достаточно больших n интеграл не равен единице, т.е. $\varphi_n(0)$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.