Лекция 8 (24) по функциональному анализу 1 апреля 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 22: Полинормированные пространства.

Для решения некоторых задач (в частности, для приложений) разработанная теория линейных операторов в нормированных пространствах оказалось недостаточно общей. Мы расширим круг рассматриваемых пространств.

Напомним, что неотрицательная функция p на линейном пространстве называется *полунормой*, если $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ и $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ (то есть отличие от нормы в том, что нулевое значение может приниматься не только на нулевом элементе).

Определение. *Полинормированным пространством* называется линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ с набором полунорм на нем, по которому описанным ниже образом задана топология.

Определение. *Шаром* в полинормированном пространстве с центром x_0 по полунормам $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}$ (произвольный непустой конечный поднабор) и радиусом $\varepsilon > 0$ называется

$$U_{\varepsilon}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_0) = \{x \in E \, : \, \forall k = 1, \ldots, n \quad p_{\alpha_k}(x - x_0) < \varepsilon\}.$$

Множество A в полинормированном пространстве называется *открытым*, если вместе с любой точкой оно содержит шар с центром в этой точке.

Из неравенства треугольника для полунормы сразу следует, что шар сам по себе является открытым множеством.

Определим также понятие ограниченного линейного отображения полинормированных пространств.

Определение. Линейное отображение A полинормированного пространства $(E, \{p_\alpha\})$ в полинормированное пространство $(F, \{q_\beta\})$ называется *ограниченным*, если для любого β найдутся такое $C = C(\beta)$ и конечное число таких $\alpha_k = \alpha_k(\beta)$, что для любого $x \in E$ выполнено неравенство

$$q_\beta(Ax) \leqslant C \max_{k=1,\ldots,n} p_{\alpha_k}(x).$$

С другой стороны, для такого отображения, как и для любого отображения между топологическими пространствами, можно говорить о его непрерывности. Установим аналог теоремы 15.1.

Теорема 22.1. *Пусть A — линейный оператор из полинормированного пространства E в полинормированное пространство F. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) A ограничен;

(ii) A непрерывен в каждой точке пространства;

(iii) A непрерывен в нуле.

Доказательство.

(i)→(ii) Пусть $x \in E$, $Ax = y$, V_y — окрестность точки y. По определению топологии найдутся такие $\varepsilon > 0$ и β_j, что $U_\varepsilon^{\beta_1,\dots\beta_m}(y) \subset V_y$. В силу ограниченности оператора найдутся такие C_j и $\alpha_{j,k}$:
$$q_{\beta_j}(Ax) \leqslant C_j \max_{k=1,\dots,n} p_{\alpha_j,k}(x).$$
Полагая $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\max_{j=1,\dots,m} C_j}$, в силу линейности оператора получим, что для любого $x' \in U_\delta^{\{\alpha_{j,k}\}}(x)$ выполнено $Ax' \in U_\varepsilon^{\beta_1,\dots\beta_m}(y)$.

(ii)→(iii) — тривиально.

(iii)→(i) Рассмотрим некоторую полунорму q_β. По определению непрерывности в нуле найдется окрестность $U_\delta^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(0)$, образ которой вложен в $U_1^\beta(0)$, то есть если $p_{\alpha_k}(x) < \delta$, то $q_\beta(Ax) \leqslant 1$.

Для произвольного $x \in E$ возможны два варианта:

(1) $\lambda = \max_{k=1,\dots,n} p_{\alpha_k}(x) > 0$. Тогда $\frac{\delta}{2\lambda}x \in U_\delta^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(0)$, то есть $q_\beta(A\frac{\delta x}{2\lambda}) \leqslant 1$, откуда в силу линейности оператора и однородности полунорм имеем
$$q_\beta(Ax) \leqslant \frac{2\lambda}{\delta} = \frac{2}{\delta} \max_{k=1,\dots,n} p_{\alpha_k}(x).$$
(2) все $p_{\alpha_k}(x)$ равны нулю. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеем $\lambda x \in U_\delta^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(0)$, то есть $A(\lambda x) \in U_1^\beta(0)$, а это возможно лишь при $q_\beta(\lambda Ax) = 0$. Тогда неравенство, полученное в п.1, тем более выполнено.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть на линейном пространстве E заданы две системы полунорм $\{p_\alpha\}$ и $\{q_\beta\}$, причем для любого β найдутся такие $C = C(\beta)$ и $\alpha_k = \alpha_k(\beta)$, что для любого $x \in E$ выполнено неравенство*
$$q_\beta(x) \leqslant C \max_{k=1,\dots,n} p_{\alpha_k}(x).$$
Тогда топология τ_p, задаваемая семейством полунорм $\{p_\alpha\}$, не слабее, чем топология τ_q, задаваемая семейством полунорм $\{q_\beta\}$.

Для доказательства достаточно применить теорему к тождественному оператору.

Замечание. Если верна и аналогичная обратная оценка, то топологии совпадают (такие системы полунорм называются *эквивалентными*). Обратно, если топологии совпадают, то системы полунорм будут эквивалентны.

Лемма 22.1. *Топология полинормированного пространства является хаусдорфовой тогда и только тогда, когда для любого $x \neq 0$ существует такое α, что $p_\alpha(x) \neq 0$.*

Доказательство.

Если пространство хаусдорфово, то для любого x найдется окрестность нуля, его не содержащая, т.е. $x \notin U_\varepsilon^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(0)$, то есть $p_{\alpha_k}(x) \geqslant \varepsilon$ при некотором k, что и требовалось.

Обратно, если x и y — два различных элемента, то существует такое α, что $p_\alpha(x-y) = \varepsilon > 0$. Тогда $U_{\varepsilon/3}^\alpha(x) \cap U_{\varepsilon/3}^\alpha(y) = \varnothing$ по неравенству треугольника. Лемма доказана.

Теорема 22.2. *Топология полинормированного пространства может быть задана нормой тогда и только тогда, когда оно хаусдорфово и система полунорм эквивалентна конечной.*

Доказательство.

Если топология задана нормой, то она хаусдорфова, а по доказанному выше система полунорм эквивалентна конечной (= системе из одной нормы).

Обратно, пусть система полунорм эквивалентна конечной системе $\{p_k\}_{k=1}^n$. Рассмотрим функцию $p(x) = \sum_{k=1}^n p_k(x)$. Эта функция является полунормой. Если к тому же пространство хаусдорфово, то для каждого $x \neq 0$ по предыдущей лемме хотя бы одно слагаемое отлично от нуля, то есть p — норма. В то же время $p_k(x) \leqslant p(x)$ и $p(x) \leqslant n \max_k p_k(x)$, т.е. система $\{p_k\}_{k=1}^n$ эквивалентна системе из одной нормы p, а тогда и эта норма задает исходную топологию полинормированного пространства.

Теорема 22.3. *Топология полинормированного пространства может быть задана метрикой тогда и только тогда, когда оно хаусдорфово и система полунорм эквивалентна не более чем счетной.*

Доказательство.

Пусть вначале метрика ρ задает ту же топологию, что и система полунорм $\{p_\alpha\}$. Тогда эта топология хаусдорфова, как и любая топология метрического пространства. Далее, для любого шара по метрике $U_\varepsilon^\rho(0)$ внутри него найдется шар по некоторому конечному набору полунорм. Построим такие шары для радиусов $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$U_{1/m}^\rho(0) \supseteq U_{\delta_m}^{\alpha_{m,1},\ldots,\alpha_{m,k_m}}(0).$$

Покажем, что (не более чем счетная) система полунорм $\{p_{\alpha_{m,k}}\}_{k=1,m=1}^{k_m,\infty}$ эквивалентна исходной. Оценка в одну сторону тривиальна (система полунорм мажорирует любую свою подсистему). Обратно, возьмем некоторую полунорму p_α из исходной системы. В силу совпадения топологий существует $\varepsilon > 0$, для которого $U_1^\alpha(0) \supseteq U_\varepsilon^\rho(0)$. Тогда, взяв m столь большим, что $\frac{1}{m} < \varepsilon$, получаем, что $U_1^\alpha(0) \supseteq U_{\delta_m}^{\alpha_{m,1},\ldots,\alpha_{m,k_m}}(0)$. Стандартным образом используя однородность нормы, получаем отсюда оценку

$$p_\alpha(x) \leqslant \frac{1}{\delta_m} \max_{k=1,\ldots,k_m} p_{\alpha_{m,k}}(x).$$

Итак, эквивалентность системы полунорм своей счетной подсистеме доказана.

Пусть теперь топология является хаусдорфовой и задается счетной системой полунорм $\{p_k\}_{k=1}^\infty$. (В случае конечной системы можно применить предыдущую теорему). Построим метрику, задающую ту же топологию. Рассмотрим функцию

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}.$$

Для любой пары точек ряд сходится, поскольку $0 \leqslant \frac{t}{1+t} < 1$ при всех неотрицательных t. Проверим вначале, что это метрика. Первая аксиома метрики следует из того, что по лемме 22.1 для каждой пары (x,y) с $x - y \neq 0$ в сумме есть хотя бы одно ненулевое слагаемое. Вторая аксиома метрики (симметричность) очевидна из формулы. Для доказательства неравенства треугольника заметим, что если неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a \leqslant b + c$, то

$$\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}. \tag{1}$$

Действительно, если $a < b$ или $a < c$, то в силу монотонности функции $\frac{t}{1+t}$ уже одно соответствующее слагаемое в правой части больше, чем величина в левой части. В противном случае,

$$\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b+c}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Возьмем теперь произвольные точки x, y, z и при каждом k применим (1) к числам $p_k(x-y)$, $p_k(x-z)$, $p_k(z-y)$. Затем домножим k-е неравенство на $\frac{1}{2^k}$ и просуммируем по k — получится неравенство треугольника для функции ρ.

Докажем теперь, что метрика ρ задает ту же топологию. Поскольку метрика инвариантна относительно сдвига, достаточно доказать согласованность систем окрестностей нуля. Рассмотрим шар по метрике $U_\varepsilon^\rho(0)$. Выберем n так, чтобы $\frac{1}{2^n} = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Покажем, что $U_{\varepsilon/2}^{1,\dots,n}(0) \subset U_\varepsilon^\rho(0)$. Действительно, для любой точки $x \in U_{\varepsilon/2}^{1,\dots,n}(0)$ имеем

$$\rho(x,0) = \left(\sum_{k=1}^n + \sum_{k=n+1}^\infty\right) \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Обратно, пусть задан шар $U_\varepsilon^{k_1,\dots,k_m}(0)$. В нем содержится шар $U_\varepsilon^{1,\dots,n}(0)$, где $n = \max_{j=1,\dots,m} k_j$. Но если $\delta = \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, то из неравенства $\rho(x,0) < \delta$ следует, что при всех k выполяется оценка

$$\frac{1}{2^k} \frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} < \delta.$$

При $k \leqslant n$ она влечет оценку

$$\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

а тогда $p_k(x) < \varepsilon$. Итак, $U_\delta^\rho(0) \subset U_\varepsilon^{1,\dots,n}(0) \subset U_\varepsilon^{k_1,\dots,k_m}(0)$. Мы доказали согласованность систем базовых окрестностей нуля, т.е. совпадение топологий. Теорема доказана.

Тема 23: Пространства основных и обобщенных функций.

Пространствами основных или пробных функций называются некоторые пространства гладких функций с заданными на них системами полунорм. Стандартными здесь являются три пространства, точнее, три семейства (зависящих от размерности, а в двух случаях - еще и от выбора области) пространств.

Если задан мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{Z}_+)^m$, то через D^α будем обозначать оператор дифференцирования $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$. Через $|\alpha|$ будем обозначать суммарный порядок дифференцирования, т.е. $|\alpha| = \sum_{k=1}^m \alpha_k$.

Определение. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Пространством $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ называется пространство всех бесконечно гладких функций в $\mathbb{R}^m$, с системой полунорм $p_{k,\alpha}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \max_{\|x\| \leqslant k} |D^\alpha \varphi(x)|$ по всем $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^m$.

Иногда бывает удобнее рассматривать проиндексированную одним параметром систему полунорм

$$\tilde{p}_k^{\mathcal{E}}(\varphi) = \max_{\|x\| \leqslant k} \max_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

которая, очевидно, эквивалентна предыдущей.

Определение. Пространством $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется пространство всех бесконечно гладких функций в $\mathbb{R}^m$, у которых конечны полунормы $p^{\mathcal{S}}_{k,\alpha}(\varphi) = \max_{x\in\mathbb{R}^m}(1+\|x\|^k)|D^\alpha\varphi(x)|$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^m$, с системой этих полунорм.

Как и в предыдущем случае, иногда рассматривается эквивалентная система полунорм

$$\tilde{p}^{\mathcal{S}}_k(\varphi) = \max_{x\in\mathbb{R}^m}\max_{|\alpha|\leqslant k}(1+\|x\|^k)|D^\alpha\varphi(x)|,$$

Определение. Носителем $\operatorname{supp} f$ (непрерывной) функции f на $\mathbb{R}^m$ называется замыкание множества тех точек, где f отлична от нуля.

Определение. Пространством $\mathcal{D}_N(\mathbb{R}^m)$ называется множество тех бесконечно гладких функций, носители которых содержатся в шаре $\{\|x\| \leqslant N\}$. Это пространство наделяется системой полунорм $p^{\mathcal{D}}_\alpha(\varphi) = \max_{x\in\mathbb{R}^m}|D^\alpha\varphi(x)|$ по всем $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^m$.

Определение. Пространством $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ называется объединение по всем N пространств $\mathcal{D}_N(\mathbb{R}^m)$, т.е. множество всех бесконечно гладких функций в $\mathbb{R}^m$ с компактным носителем.

Замечание. Пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$ можно определить и для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, если заменить шары $\{\|x\| \leqslant N\}$ некоторым компактным исчерпанием этой области.

Не составляет труда привести пример функции из класса $\mathcal{E}$, а примером функции из класса $\mathcal{S}$, как несложно проверить, является $\varphi(x) = e^{-x^2}$, а в многомерном случае — $\varphi(x) = e^{-\sum_{k=1}^m {x_k}^2}$. Менее очевидно, что и в классе $\mathcal{D}$ есть функции, отличные от тождественного нуля.

Лемма 23.1. *(i) Существует неотрицательная функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем на $[-1,1]$, отличная от тождественного нуля.*

(ii) Для любых точек $a < b < c < d$ на вещественной прямой существует функция $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, равная тождественно нулю вне (a,d), тождественно единице на $[b,c]$, не убывающая на $[a,b]$ и не возрастающая на $[c,d]$.

(iii) Для любого натурального m и любых $B > A > 0$, существует функция из класса $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, зависящая лишь от $\|x\|$, неубывающая как функция $\|x\|$ на $[A,B]$, равная единице при $\|x\| \leqslant A$ и нулю при $\|x\| \geqslant B$. В частности, для любых натуральных m и N существует функция из класса $\mathcal{D}_{N+1}(\mathbb{R}^m)$, зависящая лишь от $\|x\|$, неубывающая как функция $\|x\|$ на $[N, N+1]$ и равная тождественно единице при $\|x\| \leqslant N$.

Доказательство.

(i) Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant 1 \\ e^{-1/(1-x^2)}, & |x| < 1 \end{cases}.$$

Ясно, что эта функция неотрицательна, ее носитель - отрезок $[-1,1]$, и она бесконечно дифференцируема всюду, кроме, быть может, точек $x = \pm 1$. Проверим, что она бесконечно дифференцируема и в этих точках. В силу четности функции достаточно рассмотреть точку $x = 1$. Для этого заметим по индукции, что для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ существуют такие многочлены P_n и Q_n, что на интервале $(-1,1)$ имеет место равенство $\varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\varphi(x)$.

Действительно, при $n = 0$ достаточно взять $P_0(x) \equiv Q_0(x) \equiv 1$. Далее,

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}e^{-1/(1-x^2)}\Big) = \frac{1}{(Q_n(x))^2}\Big(P_n'(x)Q_n(x)e^{-1/(1-x^2)}+ \\ + P_n(x)Q_n(x)\frac{-2x}{(1-x^2)^2}e^{-1/(1-x^2)} - P_n(x)Q_n'(x)e^{-1/(1-x^2)}\Big),$$

и после вынесения множителя $e^{-1/(1-x^2)}$ за скобки получаем рациональную функцию $\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)}$. Теперь по индукции же проверим, что $\varphi^{(n)}(1) = 0$. При $n = 0$ это дано; если $\varphi^{(n)}(1) = 0$, то правая $(n+1)$-я производная, очевидно, тоже равна нулю; для левой по определению производной имеем

$$\varphi^{(n+1)}(1-0) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}e^{-1/(1-x^2)} - 0}{x-1}$$

Сделав замену $t = \frac{1}{x-1}$, $x = 1 + \frac{1}{t}$, получаем, что

$$\varphi^{(n+1)}(1-0) = \lim_{t\to -\infty} t\frac{P_n(1+\frac{1}{t})}{Q_n(1+\frac{1}{t})}e^{t(2+\frac{1}{t})} = \lim_{t\to -\infty} \frac{\tilde{P}_n(t)}{\tilde{Q}_n(t)}e \cdot e^{2t}.$$

Здесь $\tilde{P}_n$ и $\tilde{Q}_n$ — многочлены, так что предел равен нулю.

(ii) Пусть $s = \int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt$, где φ – функция, построенная в пункте (i). Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a \\ \frac{b-a}{2s}\varphi\big(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\big), & a < x < b \\ 0, & b \leqslant x \leqslant c \\ -\frac{d-c}{2s}\varphi\big(\frac{2x-(c+d)}{d-c}\big), & c < x < d \\ 0, & x \geqslant d \end{cases}$$

Тогда нетрудно видеть, что ее первообразная $\psi(x) = \int_a^x \varphi_1(t)\,dt$ удовлетворяет условиям леммы.

(iii) Возьмем функцию ψ из пункта (ii) с параметрами $a = -2$, $b = -1$, $c = A^2$, $d = B^2$. Тогда функция $\varphi(x) = \psi(\sum_{k=1}^{m}(x_k)^2)$ — искомая.

Лемма доказана.

На множестве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ можно ввести много разных топологий, в том числе с помощью разных систем полунорм. Для приложений важно, чтобы сходимость по этой топологии описывалась определённым образом. Эту сходимость и топологии мы обсудим на следующей лекции.