Лекция 7 (23) по функциональному анализу 25 марта 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Дополнение: Спектр оператора умножения на функцию.

Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой, а $1 \leqslant p < \infty$. Рассмотрим в пространстве $L_p(X, M, \mu)$ оператор умножения на функцию:

$$Ax(t) = \varphi(t)x(t),$$

где $\varphi \in L_\infty(X, M, \mu)$ (можно также рассматривать φ как ограниченную измеримую функцию на X). Найдем его спектр.

Прежде всего, найдем собственные значения. Пусть $E_\lambda = \{t : \varphi(t) = \lambda\}$. Уравнение

$$(A - \lambda I)x(t) = (\varphi(t) - \lambda)x(t) = 0$$

имеет в L_p ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\mu E_\lambda > 0$. Действительно, из уравнения следует, что $x(t) = 0$ на $X \setminus E_\lambda$. Обратно, если $\mu E_\lambda > 0$, то возьмем в E_λ измеримое подмножество положительной, но конечной меры, и его индикатор будет ненулевым решением уравнения. Итак,

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu E_\lambda > 0\}.$$

С другой стороны, обратным оператором к $A - \lambda I$ может быть лишь оператор

$$R_\lambda y(t) = \frac{1}{\varphi(t) - \lambda} y(t),$$

и надо проверить, когда он корректно определен и ограничен.

Определение. Назовём λ существенным значением функции φ, если для любого $\delta > 0$ выполнено

$$\mu\{t : |\varphi(t) - \lambda| < \delta\} > 0.$$

Покажем, что $\sigma(A)$ равен множеству существенных значений функции φ.

Если λ — не существенное значение, то $\frac{1}{\varphi(t)-\lambda} \in L_\infty(X)$, так что оператор R_λ ограничен, и тем самым $\lambda \in \rho(A)$. Наоборот, если λ — существенное значение, то для любого $\delta > 0$, взяв за $E_{\lambda,\delta}$ измеримое подмножество положительной, но конечной меры в $\{t : |\varphi(t) - \lambda| < \delta\}$, получим, что

$$\left\| \frac{1}{\varphi(t) - \lambda} \chi_{E_{\lambda,\delta}} \right\|_p \geqslant \frac{1}{\delta} \|\chi_{E_{\lambda,\delta}}\|_p,$$

что означает, как минимум, неограниченность R_λ. Итак, в этом случае $\lambda \in \sigma(A)$.

Классифицируем теперь те точки спектра, которые не являются собственными значениями. Рассмотрим такое число λ, и пусть $F_n = \{t : |\varphi(t) - \lambda| > \frac{1}{n}\}$. Возьмем произвольный элемент $y \in L_p$ и положим $y_n = y \cdot \chi_{F_n}$. Тогда, с одной стороны, $x_n(t) = \frac{1}{\varphi(t)-\lambda} y_n(t) \in L_p$, поскольку $\|x_n\|_p \leqslant n\|y_n\|_p < \infty$, а с другой стороны,

$$\|y_n - y\|_p^p = \int\limits_X |y_n(t) - y(t))|^p \, d\mu \to 0$$

при $n \to \infty$ по теореме Лебега о предельном переходе с мажорантой $|y(t)|^p$. Поскольку $y_n = (A - \lambda I)x_n$, то мы получили плотность образа оператора. Итак, остаточный спектр A пуст, а все существенные значения функции φ, не являющиеся собственными значениями оператора, относятся к непрерывному спектру оператора.

Тема 20. Компактные операторы (продолжение).

Рассмотрим теперь, как устроен спектр компактного самосопряженного оператора.

Лемма 20.4. *Компактный самосопряженный оператор A на гильбертовом пространстве имеет собственные значения (и соответствующие собственные векторы).*

Доказательство.
Если $A = 0$, то любой вектор является собственным с $\lambda = 0$. В противном случае, хотя бы одно из чисел M_A и m_A, определенных в теореме 19.7, отлично от нуля. По указанной теореме оба этих числа лежат в спектре, но по теореме 20.3 то из них, которое отлично от нуля, является собственным значением. Лемма доказана.

Лемма 20.5. *Если A — самосопряженный оператор в H, а H_0 — его инвариантное относительно A подпространство (т.е. $A(H_0) \subset H_0$), то $H_0^\perp$ — тоже инвариантное подпространство.*

Доказательство.
Для любого $y \in (H_0)^\perp$ и любого $x \in H_0$ имеем $\langle Ay_0, x\rangle = \langle y_0, Ax\rangle = 0$. Поэтому $Ay_0 \in H_0^\perp$. Лемма доказана.

Лемма 20.6. *Если A — самосопряженный оператор, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — два его собственных значения, а x_1, x_2 — любые соответствующие им собственные вектора, то $x_1 \perp x_2$.*

Доказательство.
По теореме 19.7 $\lambda_j \in \mathbb{R}$ (впрочем, это элементарно проверяется «в лоб»). Тогда

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle,$$

так что либо $\lambda_1 = \lambda_2$, либо $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. Лемма доказана.

Теорема 20.4 (теорема Гильберта — Шмидта). *Пусть A — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда в этом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора H.*

Доказательство.
В ядре H_0 оператора A по следствию из теоремы 18.5 существует ортонормированный базис — он по определению ядра состоит из собственных векторов, и H_0 тривиальным образом инвариантно относительно A.

Рассмотрим все ненулевые собственные значения $\{\lambda_n\}$ оператора A (по лемме 20.4 они есть, а по теореме 20.3 это не более чем счетное множество). В каждом собственном подпространстве H_n выберем ортонормированный базис $\{e_{n,k}\}_k$. Поскольку по лемме 20.6 все H_n попарно ортогональны друг другу и H_0, то $\{e_{n,k}\}_{n,k}$ — ортонормированный базис в замыкании своей линейной оболочки, которое мы обозначим через H'. Оно ортогонально пространству H_0. Кроме того, поскольку каждый $e_{n,k}$ —собственный для ограниченного оператора A, то пространство H' инвариантно относительно A. Предположим, что $H' \oplus H_0 \neq H$; тогда $H'' = (H' \oplus H_0)^\perp$ по лемме 20.5 тоже инвариантно относительно A, а тогда по лемме 20.4 в нем найдется собственный вектор. Это противоречит тому что мы взяли все собственные значения и базисы в соответствующих собственных подпространствах. Теорема доказана.

Компактный оператор, не являющийся самосопряженным, может не иметь ни одного собственного вектора, так же как и самосопряженный оператор, не являющийся компактным. Поэтому для них теорема неверна. Однако получены результаты, которые можно рассматривать как обобщение теоремы Гильберта — Шмидта на такие случаи. Обобщением на случай любого самосопряженного оператора является спектральная теорема, которая имеет важнейшее значение для теории операторов и ее приложений. Но эта теорема выходит за рамки нашего курса.

В заключение этой темы докажем компактность оператора, банахово сопряженного к компактному. Нам понадобится усиление (в одну сторону) критерия Арцела.

Теорема 20.5. *Пусть Ω — компактное метрическое пространство, $C(\Omega)$ — пространство непрерывных функций на нем с нормой $\|x\| = \max_\Omega |x(t)|$, а M — ограниченное и равностепенно непрерывное множество функций в $C(\Omega)$. Тогда оно предкомпактно в $C(\Omega)$.*

Замечание. В обратную сторону утверждение тоже верно.

Доказательство.

Рассмотрим пространство $B(\Omega)$ всех ограниченных на Ω функций с нормой $\|x\| = \sup_\Omega |x(t)|$. Поскольку $C(\Omega)$ — замкнутое подпространство в полном $B(\Omega)$, то по критерию Хаусдорфа достаточно построить для M конечную ε-сеть из элементов $B(\Omega)$ при каждом $\varepsilon > 0$.

Выберем такое $\delta > 0$, что для любой функции $x \in M$ при $\rho(t', t'') < \delta$ выполнено условие $|x(t') - x(t'')| < \frac{\varepsilon}{2}$, что возможно сделать по определению равностепенной непрерывности. Покроем Ω открытыми шарами радиуса $\frac{\delta}{2}$ с центрами во всех точках $t \in \Omega$, и выберем, пользуясь компактностью Ω, конечное подпокрытие — шары с центрами t_k, $k = 1, \ldots, k_0$. Положим $E_1 = B_{\delta/2}(t_1)$ и $E_k = B_{\delta/2}(t_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$, $k = 2, \ldots, k_0$. Для простоты будем считать, что все эти множества не пусты (иначе выкинем пустые, изменив нумерацию).

Пусть R — константа, ограничивающая все функции из M, а $\{b_j\}_{j=1}^{j_0}$ — конечная $\varepsilon/2$-сеть для шара $B_R(0)$ в комплексной плоскости. Рассмотрим теперь семейство функций, которые на каждом E_k постоянны и принимают там одно из значений b_j. Оно конечно; покажем, что оно и есть искомая ε-сеть. Пусть $x \in M$. Выберем на каждом E_k точку τ_k и возьмем такое $j = j(x, k)$, что $|x(\tau_k) - b_j| < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем в построенном семействе функцию y с этими значениями $b_{j(x,k)}$ на E_k. Тогда, поскольку любые две точки E_k удалены друг от друга не больше, чем на δ, то при $t \in E_k$ имеем

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(\tau_k) - x(t)| + |x(\tau_k) - y(\tau_k)| + |y(\tau_k) - y(t)| = |x(\tau_k) - x(t)| + |x(\tau_k) - b_{j(x,k)}| + 0 < \varepsilon.$$

Итак, $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 20.6. *Оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ компактен тогда и только тогда, когда банахово сопряженный оператор $A' \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ компактен.*

Замечание. Рассуждая аналогично первой части доказательства или пользуясь изометрией между гильбертовым пространством и его сопряженным, получаем, что если A — компактный оператор в гильбертовом пространстве H, то A^* тоже компактен.

Доказательство.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функционалов из единичного шара пространства F^*. Нам нужно показать, что в $\{A' f_n\}$ есть сходящаяся по норме подпоследовательность.

Сходимость по норме равносильна равномерной сходимости на единичном шаре U пространства E, что, в свою очередь, равносильно сходимости некоторой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ на множестве $A(U)$, которое предкомпактно в силу компактности оператора A. Рассмотрим замыкание $\Omega = \overline{A(U)}$ — компакт, и пространство $C(\Omega)$ непрерывных на нем функций. Для любого $y = Ax \in A(U)$ имеем $|f_n(y)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\|$, и по непрерывности это верно и для $y \in \Omega$. С другой стороны,

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| = |f_n(y_1 - y_2)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leqslant \|y_1 - y_2\|,$$

поскольку f_n взяты из шара. Итак, по теореме 20.5 $\{f_n\}$ предкомпактна в $C(\Omega)$, следовательно, существует подпоследовательность, равномерно сходящаяся на Ω, в частности, на $A(U)$. Таким образом, из компактности A следует компактность A'.

Чтобы доказать обратное, рассмотрим оператор A'', действующий из E^{**} в F^{**} по формуле $A''\varphi(f) = \varphi(A'f)$. Заметим, что если функционал φ есть функционал вида $\varphi_x(f) = f(x)$ на F, то

$$A''\varphi_x(f) = \varphi_x(A'f) = A'f(x) = f(Ax) = \varphi_{Ax}(f).$$

Обозначая через j_1 и j_2 канонические изометрические вложения E в E^{**} и F в F^{**} соответственно, можно переписать это как $A''j_1 = j_2 A$. Поскольку j_1 и j_2 изометричны, а A'' компактен по доказанному, то A компактен. Действительно, если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность в E, то полагая $\varphi_{x_n} = j_1 x_n$, получаем в силу изометричности j_1, что $\{\varphi_{x_n}\}$ — ограниченная последовательность в E^{**}. Выберем из $\{A''\varphi_{x_n}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{A''\varphi_{x_{n_k}}\}$. Но $A''\varphi_{x_{n_k}} = A''j_1 x_{n_k} = j_2 A x_{n_k}$, и в силу изометричности j_2 последовательность $\{Ax_{n_k}\}$ фундаментальна, т.е. сходится в силу полноты E. Теорема доказана.

Тема 21. Теоремы Фредгольма.

Свойства спектров компактных операторов позволяют получить результаты о разрешимости уравнений вида $(I - K)x = y$, где K — компактный. Эти результаты называют теоремами Фредгольма. Сам Фредгольм рассматривал частный случай, когда K — интегральный оператор в $L_2([a, b])$.

Мы рассмотрим для простоты случай гильбертова пространства, а аналоги для банахова пространства приведем без доказательства.

Установим сначала ряд вспомогательных утверждений.

Прежде всего, переформулируем в нужных нам терминах такой ранее полученный факт.

Лемма 21.1. *Пусть K — компактный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда $(I-K)(H)$ — замкнутое подпространство конечной коразмерности, т.е. $H = (I-K)(H) \oplus \ker(I - K^*)$. При этом $n = \dim\ker(I - K^*) < \infty$.*

Доказательство.

Поскольку оператор K^* тоже компактен, то $n = \dim \operatorname{Ker}(I - K^*) < \infty$ по лемме 20.3, и образ, т.е. множество $(I - K)(H)$, замкнут по той же лемме. Но согласно лемме 19.3 (i), выполнено равенство

$$H = \ker(I - K^*) \oplus \overline{(I - K)(H)}.$$

Лемма доказана.

Следствие. ***(Первая теорема Фредгольма)*** *Неоднородное уравнение $(I - K)x = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда y ортогонально всем решениям сопряженного однородного уравнения, т.е. $y \perp \ker(I - K^*)$.*

В банаховом случае вместо ортогональности требуется следующий ее аналог: $f(y) = 0$ для любого функционала $f \in \ker(I - K')$.

Лемма 21.2. *Пусть K — компактный оператор в гильбертовом пространстве H, $T = I - K$, $H_0 = H$, $H_k = T(H_{k-1})$ для всех натуральных k. Тогда существует такое $n \geqslant 0$, что $H_k = H_{k+1}$ при всех $k \geqslant n$.*

Доказательство.

Если $H_n = H_{n+1}$, то и все последующие H_k равны H_n по определению. Предположим, что $H_k \neq H_{k+1}$ при всех k. Тогда существуют векторы $x_k \in H_k \ominus H_{k+1}$, нормы которых равны единице. Имеем

$$Kx_k - K_{x_l} = x_k - x_l + Tx_l - Tx_k.$$

При $l > k$ имеем $x_l - Tx_l + Tx_k \in H_{k+1}$, откуда $\|Kx_k - Kx_l\| \geqslant \operatorname{dist}(x_k, H_{k+1}) = 1$. Тем самым из последовательности $\{Kx_k\}$ нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность, что противоречит компактности оператора K. Лемма доказана.

Теорема 21.1 (вторая теорема (альтернатива) Фредгольма). *Пусть K — компактный оператор в банаховом пространстве E, а $\lambda \neq 0$. Тогда выполнено ровно одно из двух утверждений:*

(i) уравнение $Kx - \lambda x = y$ однозначно разрешимо при всех $y \in X$,

(ii) уравнение $Kx - \lambda x = 0$ имеет ненулевое решение.

Доказательство.

(для случая гильбертова пространства)

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda = 1$. Положим $T = I - K$. Если нарушено (ii), то оператор T инъективен. Поэтому в последовательности пространств $H_0 = H$, $H_k = T(H_{k-1})$ либо все элементы совпадают, либо все элементы попарно различны (образ множества строго больше образа его части). Но вторая возможность противоречит лемме 21.2. Поэтому, в частности, $H_1 = T(H) = H_0 = H$, т.е. выполнено (i).

Обратно, предположим, что выполнено (i), т.е. $\operatorname{Im} T = H$. Тогда по лемме 21.1 имеем $\ker T^* = \{0\}$. В силу предыдущего рассуждения $\operatorname{Im} T^* = H$. Вновь применяя лемму 21.1, получаем, что $\ker T = \{0\}$, т.е. (ii) нарушено. Итак, (i) равносильно отрицанию (ii), и теорема доказана.

Теорема 21.2 (третья теорема Фредгольма). *Пусть K — компактный оператор в банаховом пространстве E, а $\lambda \neq 0$. Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker}(K - \lambda I) = \dim \operatorname{Ker}(K' - \lambda I).$$

а в случае гильбертова пространства

$$\dim \operatorname{Ker}(K - \lambda I) = \dim \operatorname{Ker}(K^* - \bar{\lambda} I).$$

Доказательство.

(для случая гильбертова пространства) Как и в предыдущей теореме, можно ограничиться случаем $\lambda = 1$. Пусть $T = I - K$, Пусть $m = \dim\ker T$, $n = \dim\ker T^*$. Выберем в $\ker T$ ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$, а в $\ker T^*$ — ортонормированный базис $\{\psi_k\}_{k=1}^n$.

Предположим, что $m < n$. Рассмотрим оператор

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^m \langle x, \varphi_j\rangle \psi_j.$$

Поскольку ограниченный оператор с конечномерным образом компактен, то S, так же как и T, имеет вид $S = I - \tilde{K}$, где $\tilde{K}$ — компактный.

Покажем, что уравнение $Sx = 0$ имеет только тривиальное решение. Пусть

$$Tx + \sum_{j=1}^m \langle x, \varphi_j\rangle \psi_j = 0.$$

Векторы ψ_j, как элементы $\ker T^*$, ортогональны образу T по лемме 21.1. Поскольку они также ортогональны друг другу, то из последнего равенства следует, что $Tx = 0$ и что $\langle x, \varphi_j\rangle = 0$ при всех j. Но $\{\varphi_j\}$ образуют базис в $\ker T$, следовательно, $x = 0$.

Применяя к оператору S альтернативу Фредгольма, получаем, что существует такой y, для которого

$$\psi_{m+1} = Sy = Ty + \sum_{j=1}^m \langle y, \varphi_j\rangle \psi_j$$

Домножая это равенство скалярно на ψ_{m+1}, получим, что $1 = \langle Ty, \psi_{m+1}\rangle = 0$. Мы пришли к противоречию, следовательно, $m \geqslant n$. Из соображений симметрии аналогично $n \geqslant m$. Теорема доказана.