Лекция 6 (22) по функциональному анализу 18 марта 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Дополнение: Приближение функции тригонометрическими полиномами.

Обозначим через $\mathbb{T}$ отрезок $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами; функции на $\mathbb{T}$ можно также рассматривать как 2π-периодические функции на прямой. Возьмём на этом отрезке стандартную меру Лебега. В пространстве $L_2(\mathbb{T})$ рассмотрим систему функций $\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Элементарно проверяется её ортонормированность. Пусть $x \in L_2(\mathbb{T})$. Рассмотрим её коэффициенты Фурье

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{T}} x(s) e^{-iks}\, ds$$

и частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^{n} \hat{x}(k) e^{ikt}.$$

Подставляя одно в другое, получим следующее интегральное выражение для частичных сумм:

$$S_n(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int\limits_{\mathbb{T}} x(s) e^{ik(t-s)}\, ds = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)} \right) x(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} \right) x(t+s)\, ds.$$

Выражение в скобках в последней формуле называется n-м ядром Дирихле и обозначается $D_n(s)$. Преобразуем его по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Заметим для дальнейшего, что

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} D_n(s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \sum_{k=-n}^{n} e^{iks}\, ds = 1$$

(все слагаемые, кроме $k = 0$, дают нулевой интеграл).

Рассмотрим теперь средние арифметические этих частичных сумм, так называемые суммы Фейера:

$$\sigma_n(x,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} x(t+s) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(s) \right) ds.$$

Выражение в скобках называется n-м ядром Фейера и обозначается $F_n(s)$. Поскольку в силу формул тригонометрии

$$\sum_{k=0}^{n} \sin((k+\frac{1}{2})t) \sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \big(\cos kt - \cos((k+1)t)\big) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos((n+1)t)\big),$$

то для ядра Фейера получаем выражение

$$F_n(t) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1-\cos((n+1)t)}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{(n+1)} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

По построению функции S_n и σ_n — тригонометрические полиномы, т.е. конечные линейные комбинации функций рассматриваемой ортонормированной системы.

Для следующей теоремы важен не явный вид ряда Фейера, а следующие его три свойства:

1. Ядро Фейера неотрицательно (очевидно из выведенной формулы).

2. Выполнено равенство

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} F_n(s)\,ds = \frac{1}{(n+1)\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \sum_{k=0}^{n} D_k(s)\,ds = 1.$$

3. Для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\delta<|s|<\pi} F_n(s)\,ds = 0.$$

Третье свойство следует того, что оценка синуса в числителе единицей даёт на $\{\delta < |s| < \pi\}$ неравенство

$$|F_n(s)| \leqslant \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\pi^2}{\delta^2}.$$

Теорема . *Для любой непрерывной на $\mathbb{T}$ функции средние Фейера её ряда Фурье равномерно на $\mathbb{T}$ сходятся к ней.*

Доказательство.

Для заданного $\varepsilon > 0$ в силу равномерной непрерывности функции можно выбрать $\delta > 0$ столь малым, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ при $|t_1 - t_2| < \delta$. В силу свойства 2 имеем

$$\sigma_n(x,t) - x(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} (x(t+s) - x(t)) F_n(s)\,ds.$$

Для выбранного $\delta > 0$ разобьем отрезок $\mathbb{T}$ на отрезок $[-\delta,\delta]$ и остальную часть. Тогда в силу свойств 1 и 2 для любого t

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} (x(t+s) - x(t)) F_n(s)\,ds \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} F_n(s)\,ds \leqslant \varepsilon,$$

а в силу свойства 3

$$\left| \int\limits_{\delta<|s|<\pi} (x(t+s) - x(t)) F_n(s)\,ds \right| \leqslant 2\sup|x| \cdot \int\limits_{\delta<|s|<\pi} F_n(s)\,ds \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно по t. Теорема доказана.

Следствие. *Тригонометрическая ОНС тотальна в $L_2(\mathbb{T})$.*

Доказательство.
Для произвольного элемента $x \in L_2(\mathbb{T})$ найдется такая непрерывная функция y, что $\|x - y\|_2 < \varepsilon$. А именно, рассуждая как в доказательстве теоремы 11.4, приблизим x конечной линейной комбинацией индикаторов интервалов, а затем каждый из них приблизим кусочно-линейной непрерывной функцией.

По доказанной теореме найдется такой тригонометрический многочлен P (а именно, среднее Фейера с достаточно большим номером), что $\|y-P\|_{C(\mathbb{T})} < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, а тогда $\|y-P\|_2 < \varepsilon$, и по неравенству треугольника $\|x - P\|_2 < 2\varepsilon$. Следствие доказано.

Тема 20. Компактные операторы (продолжение).

Компактность интегрального оператора

Важным примером компактных операторов являются интегральные операторы в пространствах $L_2(X, \mu)$.

Введем следующие обозначения: $L_p(\square) = L_p(X^2, \mathfrak{M}, \mu \times \mu)$, $\varphi \times \psi(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$.

Лемма 20.2. *Если $\{\varphi_n(x)\}_n$ и $\{\psi_m(y)\}$ — полные онс в $L_2(X, M, \mu)$, то $\{\varphi_n \times \psi_m\}_{n,m}$ — полная онс в $L_2(\square)$.*

Доказательство.
Рассмотрим скалярное произведение
$$\langle \varphi_n \times \psi_m, \varphi_k \times \psi_l \rangle = \int\limits_{X^2} \varphi_n(x)\psi_m(y)\overline{\varphi_k(x)\psi_l(y)}\, d(\mu \times \mu)(x, y).$$
Поскольку $\varphi_n\overline{\varphi_k} \in L_1(X)$, $\psi_m\overline{\psi_l} \in L_1(X)$, то по теореме Тонелли произведение четырех функций лежит в $L_1(\square)$, применима теорема Фубини, и получаем, что
$$\langle \varphi_n \times \psi_m, \varphi_k \times \psi_l \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle \cdot \langle \psi_m, \psi_l \rangle,$$
что дает ортонормированность системы в $L_2(\square)$.

Пусть теперь функция $f \in L_2(\square)$ ортогональна всем $\varphi_n \times \psi_m$. Зафиксируем n и рассмотрим функцию $F_n(y) = \int_X f(x, y)\overline{\varphi_n(x)}\, d\mu(x)$. Функция $f(x, y)\overline{\varphi_n(x)\psi_m(y)}$ принадлежит $L_1(\square)$ как произведение двух функций из $L_2(\square)$ (по неравенству Гёльдера). Тогда по теореме Фубини
$$\langle f, \varphi_n \times \psi_m \rangle_{L_2(\square)} = \langle F_n, \psi_m \rangle_{L_2(X)} = 0.$$
В силу полноты системы $\{\psi_m\}$ получаем, что $F_n(y) = 0$ п.в. Тогда для почти всех y имеем $F_n(y) = 0$ при всех n. Взяв такое y, видим, что $\langle f(\cdot, y), \varphi_n \rangle_{L_2(X)} = 0$ при всех n, то есть $f(\cdot, y) = 0$ п.в. в силу полноты системы $\{\varphi_n\}$. Итак, измеримая функция f равна нулю почти всюду на почти всех сечениях. Поэтому она равна нулю почти всюду. Это и означает полноту системы $\{\varphi_n(x) \times \psi_m(y)\}_{n,m}$. Лемма доказана.

Теорема 20.2. *Пусть (X, μ) — такое пространство с мерой, что $L_2(X, \mu)$ сепарабельно, $K \in L_2(\square)$. Тогда оператор*
$$Ax(t) = \int\limits_X K(t, s)x(s)\, d\mu(s)$$
корректно определен и принадлежит классу $\mathcal{K}(L_2(X))$.

Доказательство.
Сначала докажем, что оператор корректно определен и принадлежит классу $\mathcal{L}(L_2(X))$. Действительно, по неравенству КБШ имеем:

$$\|Ax\|_2^2 = \int\limits_X |Ax(t)|^2\, d\mu(t) \leqslant \int\limits_X \left| \int\limits_X K(t,s)x(s)\, d\mu(s) \right|^2 d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_X \left(\int\limits_X |K(t,s)|^2\, d\mu(s) \int\limits_X |x(s)|^2 d\mu(s) \right) d\mu(t) = \|K\|^2_{L_2(\Box)} \cdot \|x\|_2^2.$$

Мы получили заодно оценку $\|A\| \leqslant \|K\|_{L_2(\Box)}$, которая нам понадобится. Возьмем теперь в $L_2(\Box)$ полную онс вида $\varphi_n \times \varphi_m$ (такие существуют по предыдущей лемме) и разложим функцию K в ряд Фурье по ней. Положим

$$K_N(t,s) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \widehat{K}(n,m)\varphi_n(t)\varphi_m(s).$$

В силу равенства Парсеваля $\|K - K_N\|_{L_2(\Box)} \to 0$ при $N \to \infty$. Если обозначить через A_N интегральный оператор, определяемый функцией K_N, то по доказанной выше оценке $\|A - A_N\| \leqslant \|K - K_N\|_{L_2(\Box)} \to 0$. Но оператор A_N действует по формуле

$$A_N x(t) = \int\limits_X \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \widehat{K}(n,m)\varphi_n(t)\varphi_m(s) \right) x(s)\, d\mu(s) =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\int\limits_X \sum_{m=1}^{N} \widehat{K}(n,m)\varphi_m(s)x(s)\, d\mu(s) \right) \varphi_n(t).$$

Таким образом, образ оператора лежит в линейной оболочке элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$. Поскольку ограниченность оператора уже известна, то по теореме 20.1(i) все A_N компактны, а тогда по теореме 20.1(ii) и оператор A компактен как их предел. Теорема доказана.

Спектры компактных операторов

Лемма 20.3. *Пусть оператор K в банаховом пространстве компактен. Тогда ядро оператора $I - K$ конечномерно, а его образ замкнут.*

Доказательство.
Во-первых, на ядре оператора $I - K$ оператор I совпадает с K, стало быть, компактен, поскольку оператор, компактный на некотором пространстве, очевидным образом компактен на любом (замкнутом) подпространстве. Но тождественный оператор компактен только на конечномерных пространствах по следствию из теоремы 20.1.

Во-вторых, предположим, что $y_n = x_n - Kx_n \to y$. Пусть сначала $\{x_n\}$ ограничена (или содержит ограниченную подпоследовательность). Тогда из $\{Kx_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{Kx_{n_j}\}$. Но тогда x_{n_j} тоже сходится (как сумма двух сходящихся) к некоторому элементу x, и $y = x - Kx \in \mathrm{Im}(I-K)$.

Предположим теперь, что $\{x_n\}$ стремится к бесконечности. Покажем, что можно заменить её другой последовательностью с теми же образами y_n, но содержащей ограниченную подпоследовательность. Тогда и в этом случае предыдущее рассуждение докажет замкнутость образа.

Пусть $Z = \mathrm{Ker}(I-K)$, по доказанному это конечномерное пространство. Тогда расстояния $d_n = \mathrm{dist}(x_n, Z)$ достигаются (в силу компактности шара в конечномерном пространстве) на некоторых элементах $z_n \in Z$. Предположим, что $d_n \to +\infty$. Зададим векторы $v_n = \frac{1}{\|x_n - z_n\|}(x_n - z_n)$. Тогда $\|v_n\| = 1$, $v_n - Kv_n = \frac{1}{\|x_n - z_n\|}(I-K)x_n = \frac{1}{d_n}y_n \to 0$. Из элементов $\{Kv_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{Kv_{n_j}\}$ в силу компактности оператора K. Тогда по линейности сходится и подпоследовательность $\{v_{n_j}\}$, и пусть v — ее предел. Тогда $v - Kv = \lim_{j\to\infty}(v_{n_j} - Kv_{n_j}) = 0$, то есть $v \in Z$. С другой стороны, для любого $z \in Z$ и всех n имеем

$$\|v_n - z\| = \frac{1}{d_n}\|x_n - (z_n + d_n z)\| \geqslant \frac{d_n}{d_n} = 1.$$

Итак, $\mathrm{dist}(v_n, Z) = 1$ и они не могут сходится к элементу из Z. Полученное противоречие показывает, что в $\{d_n\}$ есть ограниченная подпоследовательность, то есть последовательность векторов $\{x_n - z_n\}$ содержит ограниченную по норме подпоследовательность. Но $(I-K)(x_n - z_n) = (I-K)x_n = y_n$. Мы получили искомую последовательность. Лемма доказана.

Теорема 20.3. *Спектр компактного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве состоит из не более чем счетного множества собственных значений $\{\lambda_n\}$, для каждого из которых собственное подпространство конечномерно и которые (если их бесконечно много) стремятся к нулю, а также самой точки 0 (которая может быть, а может не быть собственным значением).*

Доказательство.

Пусть $K \in \mathcal{K}(E)$. По следствию из теоремы 20.1 оператор K необратим, т.е. $0 \in \sigma(K)$. Пусть $\lambda \neq 0$ — некоторая точка спектра K. Без ограничения общности $\lambda = 1$. Покажем, что λ — собственное значение. Предположим, что это не так. Положим $A = I - K$. Этот оператор биективен. По предыдущей лемме пространство $E_1 = A(E)$ замкнуто в E, и оно не совпадает с E. Положим $E_n = A(E_{n-1}) = A^n(E)$. Тогда все эти подпространства замкнуты и

$$E \supset E_1 \supset \dots \supset E_{n-1} \supset E_n \supset \dots,$$

причем все эти включения строгие, поскольку если $E_{n+1} = E_n$, то $E_{n-1} = A^{-1}(E_n) = A^{-1}(E_{n+1}) = E_n$, откуда по индукции получаем, что $E = E_1$, а мы предположили противное. По лемме о почти перпендикуляре найдутся такие $x_n \in E_n$, что $\|x_n\| = 1$ и $\mathrm{dist}(x_n, E_{n+1}) > \frac{1}{2}$. Пусть $m > n$. Запишем равенство

$$Kx_n - Kx_m = x_n - x_m + (K-I)x_n - (K-I)x_m = x_n + \Big(-x_m + (K-I)x_n - (K-I)x_m\Big)$$

и заметим, что вектор в скобках принадлежит подпространству E_{n+1}, а потому $\|Kx_n - Kx_m\| \geqslant \mathrm{dist}(x_n, E_{n+1}) > \frac{1}{2}$. Мы получили, что из $\{Kx_n\}$ нельзя выбрать фундаментальной подпоследовательности, что противоречит компактности оператора K. Итак,

λ — собственное значение. Конечномерность собственного подпространства получена в предыдущей лемме. Нам осталось проверить, что если $\{\lambda_n\}$ — бесконечная последовательность различных собственных значений, то она стремится к нулю. Если это не так, то есть отличная от нуля предельная точка, т.е. найдется (под)последовательность $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. Тогда $|\lambda_n| > \sigma > 0$ (хотя бы начиная с некоторого номера).

Выберем для каждого n ненулевой собственный вектор x_n. Заметим, что все они линейно независимы. Действительно, если предположить, что $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$, где $a_n \neq 0$, то, применяя к этому равенству оператор K, получим еще одну линейную зависимость, не пропорциональную первой, а потому $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ тоже линейно зависимы. Продолжая по индукции, придем к равенству $x_1 = 0$.

Пусть X_n — линейная оболочка $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $K(X_n) \subset X_n$. По лемме о почти перпендикуляре найдутся такие $y_n \in X_n$, что $\|y_n\| = 1$ и $\operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}$. Тогда $y_n = \alpha_n x_n + z_n$, $z_n \in X_{n-1}$. При $n > m$ имеем

$$Ky_n - Ky_m = K(\alpha_n x_n) + Kz_n - Ky_m = \alpha_n \lambda_n x_n + Kz_n - Ky_m = \lambda_n \Big(y_n - \Big[z_n - \frac{1}{\lambda_n}(Kz_n - Ky_m) \Big] \Big).$$

Выражение в квадратных скобках принадлежит подпространству X_{n-1}, поэтому

$$\|Ky_n - Ky_m\| \geqslant |\lambda_n| \operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{\sigma}{2}.$$

Итак, из последовательности $\{Ky_n\}$ нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность, что противоречит компактности оператора K. Теорема доказана.