Лекция 5 (21) по функциональному анализу 11 марта 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 19: Спектры операторов (продолжение).

Теорема 19.2. *Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E над полем $\mathbb{C}$. Тогда $\sigma(A)$ — непустое множество.*

Доказательство.
Пусть f — произвольный линейный непрерывный функционал на $\mathcal{L}(E)$. Рассмотрим функцию комплексного переменного $z \in \rho(A)$, заданную формулой $\varphi_f(z) = f(R_z(A))$. Тогда, применяя пункт (ii) предыдущей теоремы и пользуясь непрерывностью функционала f, получаем, что

$$\varphi_f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(((A - z_0 I)^{-1})^{k+1}\Big)(z - z_0)^k$$

в окрестности любой точки $z_0 \in \rho(A)$, т.е. функция φ_f голоморфна на $\rho(A)$. В окрестности бесконечности аналогично получаем

$$\varphi_f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(-A^k\Big)\frac{1}{z^{k+1}},$$

т.е. функция φ_f стремится на бесконечности к нулю. Если теперь предположить, что спектр пуст, то $\varphi_f(z)$ будет целой функцией, стремящейся к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля она равна тождественному нулю. Но так как функционал f — любой, то по лемме 17.1 имеем $R_z(A) = 0$, что невозможно, так как нулевой оператор не является обратным ни к какому. Теорема доказана.

Идея разложения резольвенты в ряд позволяет также уточнить результат об ограниченности спектра.

Определение. Спектральным радиусом оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ называется число $r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

Теорема 19.3. *Спектральный радиус оператора может быть найден по формулам*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}.$$

Доказательство.
Докажем, прежде всего, второе равенство. Пусть $a = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$. По определению $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \geqslant a$. Пусть для заданного $\varepsilon > 0$ число p таково, что $\|A^p\|^{1/p} < a + \varepsilon$. Для произвольного $n > p$, деля его с остатком на p, получаем:

$$\|A^n\| = \|A^{pk+q}\| \leqslant \|A^p\|^k \cdot \|A\|^q \leqslant (a+\varepsilon)^{pk} \cdot \|A\|^q,$$

откуда

$$\|A^n\|^{1/n} \leqslant (a+\varepsilon)^{pk/n} \cdot \|A\|^{q/n} = (a+\varepsilon)^{(n-q)/n} \cdot \|A\|^{q/n}.$$

Поскольку при увеличении n в пределе $\frac{n-q}{n} \to 1$ и $\frac{q}{n} \to 0$, то тем самым $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant a + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что предел существует и равен a.

Проверим теперь, что предел равен спектральному радиусу. Обозначим этот предел через t_0. Во-первых, если $|\lambda| > t_0$, то, начиная с некоторого номера, имеет место оценка $\|A^n\| \leqslant t^n$, где $t_0 < t < |\lambda|$; поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\lambda^{n+1}} A^n$ сходится к оператору, обратному к $A - \lambda I$, что проверяется так же, как и в доказательстве леммы 19.1. Итак, спектр лежит в круге $\{|\lambda| \leqslant t_0\}$. Нам осталось доказать, что на границе этого круга всегда есть точка спектра.

Предположим, что это не так. Тогда $r(A) < t_0 = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$. Тогда для любого λ, $|\lambda| > r(A)$, и для любого функционала $f \in \mathcal{L}(E)^*$ функция $\varphi_f(z) = f(R_z(A))$ голоморфна в окрестности точки λ, а потому голоморфна в кольце $|z| > r(A)$. Но из предыдущих рассуждений мы знаем, что в кольце $|z| > t_0$ эта функция разлагается в ряд Лорана

$$\varphi_f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(-A^k\Big) \frac{1}{z^{k+1}}.$$

В силу единственности разложения этот ряд сходится при $|z| > r(A)$. Выберем $\lambda \in (r(A), t_0)$. Стремление общего члена ряда к нулю в точке λ дает нам условие $f(\lambda^{-k-1}A^k) \to 0$, то есть слабую сходимость к нулю последовательности $\{\lambda^{-k-1}A^k\}$. Тогда по теореме 17.5 эта последовательность ограничена по норме: $\sup_k \|A^k\lambda^{-k-1}\| \leqslant C$. Тогда для любого k имеем $\|A^k\|^{1/k} \leqslant C^{1/k}|\lambda|^{1+(1/k)}$, что в пределе при $k \to \infty$ приводит нас к неравенству $t_0 \leqslant |\lambda|$ — противоречие. Теорема доказана.

Спектры самосопряженных операторов.

Рассмотрим подробнее спектры самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Нам будет полезен также следующий более общий класс операторов.

Определение. Оператор A в гильбертовом пространстве называется *нормальным*, если $A^*A = AA^*$.

Самосопряжённый оператор, очевидно, нормален. Другой важный подкласс нормальных операторов — унитарные операторы, то есть такие, для которых $A^*A = AA^* = I$.

Лемма 19.2. *Если оператор A нормален, то для любого λ оператор $A - \lambda I$ нормален.*

Доказательство.
Поскольку $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda} I$, то элементарные преобразования показывают, что

$$(A - \lambda I)^*(A - \lambda I) = A^*A - \bar{\lambda}A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^*.$$

Лемма доказана.

Лемма 19.3. *Если $A \in \mathcal{L}(H)$, где H — гильбертово, то*
(i) $H = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A^*}$;
(ii) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A^*A)$;
(iii) $\overline{\operatorname{Im} A^*} = \overline{\operatorname{Im}(A^*A)}$.

Доказательство.
Прежде всего, для любого незамкнутого линейного подпространства E имеем $E^\perp = \overline{E}^\perp$. Действительно, включение $E^\perp \supset \overline{E}^\perp$ тривиально следует из определения; обратно, если

$\langle x, y\rangle = 0$ для любого $y \in E$, то $\langle x, z\rangle = 0$ для любого $z \in \overline{E}$ в силу непрерывности скалярного произведения. Далее,

$$x \perp \operatorname{Im} A^* \iff \forall y\, \langle x, A^*y\rangle = 0 \iff \forall y\, \langle Ax, y\rangle = 0 \iff Ax = 0.$$

Поэтому $(\overline{\operatorname{Im}(A^*)})^\perp = (\operatorname{Im}(A^*))^\perp = \operatorname{Ker} A$, и по следствию из теоремы 18.2 получаем (i).

Включение $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(A^*A)$ тривиально; обратно, если $A^*Ax = 0$, то $\langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2 = 0$. Мы получили (ii). Третье утверждение леммы непосредственно вытекает из первых двух и самосопряженности оператора A^*A, дающих равенства

$$H = \operatorname{Ker}(A^*A) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A^*A)} = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A^*} = \operatorname{Ker}(A^*A) \oplus \overline{\operatorname{Im} A^*}.$$

Лемма доказана.

Теорема 19.4. *Пусть A — нормальный оператор в гильбертовом пространстве. Тогда его остаточный спектр пуст.*

Доказательство.

Рассмотрим нормальный оператор A и предположим, что число λ относится к его остаточному спектру. Положим $B = A - \lambda I$; этот оператор нормален по лемме 19.2. Наше предположение означает, что $\overline{\operatorname{Im} B} \neq H$. В силу пункта (i) предыдущей леммы это означает, что $\operatorname{Ker} B^* \neq \{0\}$, но пункт (ii) той же леммы и нормальность B дают равенства $\operatorname{Ker} B^* = \operatorname{Ker} BB^* = \operatorname{Ker} B^*B = \operatorname{Ker} B$. Мы получили, что λ — собственное значение оператора A, а не точка остаточного спектра. Теорема доказана.

Теорема 19.5 (Критерий Вейля). *Пусть A — оператор с пустым остаточным спектром (например, нормальный). Число λ принадлежит спектру оператора A тогда и только тогда, когда существует такая последовательность векторов $\{x_n\}$, что $\|x_n\| = 1$, $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$.*

Доказательство.

Если λ — собственное значение оператора, а x_0 — соответствующий ему собственный вектор с $\|x_0\| = 1$, то достаточно взять $x_n \equiv x_0$. В противном случае, поскольку остаточный спектр пуст, то λ — точка непрерывного спектра, а в этом случае образ оператора $B = A - \lambda I$ не может быть замкнут по определению непрерывного спектра. Предположим теперь, что указанной в формулировке теоремы последовательности не существует, и покажем, что образ B в этом случае замкнут. Действительно, отсутствие такой последовательности означает, что для некоторого $\alpha > 0$ выполняется оценка $\|Bx\| \geqslant \alpha\|x\|$. Но если $Bx_n \to y_0$, то последовательность $\{Bx_n\}$ фундаментальна; в силу предыдущей оценки тогда и $\{x_n\}$ фундаментальна, т.е. $x_n \to x_0$, и по непрерывности $Bx_0 = y_0 \in \operatorname{Im} B$.

Обратно, если оператор B обратим, то по теореме Банаха об обратном операторе оператор B^{-1} ограничен, откуда непосредственно следует, что последовательности Вейля не существует.

Теорема доказана.

Теорема 19.6. *Спектр самосопряженного оператора лежит на вещественной прямой.*

Доказательство.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Тогда

$$\|Ax - \lambda x\|^2 = \langle (Ax - \alpha x) - i\beta x, (Ax - \alpha x) - i\beta x\rangle =$$
$$= \|Ax - \alpha x\|^2 - i\langle \beta x, Ax - \alpha x\rangle + i\langle Ax - \alpha x, \beta x\rangle + \beta^2\|x\|^2 = \|Ax - \alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|^2.$$

При $\|x\| = 1$, $\beta \neq 0$ получаем оценку $\|Ax - \lambda x\| \geqslant |\beta|$. Тогда по критерию Вейля $\lambda \notin \sigma(A)$. Теорема доказана.

Спектр самосопряженного оператора A связан с его *квадратичной формой* $Q_A(x) = \langle Ax, x\rangle$.

Теорема 19.7. *Спектр самосопряженного оператора A лежит на отрезке $[m_A, M_A]$, где $m_a = \inf_{\|x\|=1} Q_A(x)$, $M_A = \sup_{\|x\|=1} Q_A(x)$, и содержит его концы. При этом $\|A\| = \max\{M_A, -m_a\}$.*

Доказательство.

Пусть $M = \sup_{\|x\|=1} |Q_A(x)| = \max\{M_A, -m_a\}$. Так как по неравенству КБШ $|Q_A(x)| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|^2$, то $M \leqslant \|A\|$. Обратно, с учетом тождества параллелограмма имеем

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \langle Ax, y\rangle = \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \mathrm{Re}\,\langle Ax, y\rangle =$$
$$= \frac{1}{4} \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \Big(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4} \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \Big(M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2\Big) = \frac{M}{2} \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} (\|x\|^2 + \|y\|^2) = M.$$

Таким образом, $\|A\| = M$.

Далее, если λ — некоторая точка спектра, а $\{x_n\}$ — соответствующая последовательность Вейля, т.е. $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$, $\|x_n\| = 1$, то $\langle Ax_n - \lambda x_n, x_n\rangle \to 0$, откуда $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda\|x_n\|^2 = \lambda$, откуда $\lambda \in [m_A, M_A]$.

Пусть теперь, например, $\|A\| = M = M_A$. Заметим, что если x_n, $\|x_n\| = 1$, таковы, что $Q_A(x_n) \to M_A$, то

$$\|Ax_n - M_A x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2M_A Q_A(x_n) + M_A^2\|x_n\|^2 \leqslant \|A\|^2 - 2M_A Q_A(x_n) + M_A^2 \to 0.$$

Тогда по критерию Вейля $M_A \in \sigma_A$. Чтобы доказать, что и вторая концевая точка отрезка принадлежит спектру, достаточно отметить, что если c — некоторое вещественное число, то $Q_{A+cI}(x) = Q_A(x) + c\|x\|^2$, так что $m_{A+cI} = m_A + c$, $M_{A+cI} = M_A + c$, а, с другой стороны, $\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda + c \in \sigma(A + cI)$. Выбирая c достаточно большим по модулю и соответствующим по знаку, можно гарантировать, что $\|A + cI\| = M_A + c$ или $\|A + cI\| = -(m_A + c)$ в зависимости от знака c. Теорема доказана.

Следствие. *Спектральный радиус самосопряженного оператора равен его норме.*

Доказательство.

По определению $r(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$, так что по теореме $r(A) = \max\{M_A, -m_A\} = \|A\|$. Следствие доказано.

Тема 20. Компактные операторы.

Важный класс операторов, свойства которых в некоторых отношениях ближе к свойствам операторов в конечномерных пространствах, задается следующим определением.

Определение. Пусть E, F — банаховы пространства. Линейный оператор A, действующий из E в F, называется *компактным*, если он переводит единичный шар пространства в предкомпактное множество. Обозначение: $A \in \mathcal{K}(E, F)$.

Можно рассматривать такие операторы и для неполных пространств, но в этом случае нужно различать два класса в зависимости от того, является ли образ шара предкомпактным или только вполне ограниченным.

Лемма 20.1. *Компактный оператор переводит произвольное ограниченное множество в предкомпактное.*

Доказательство.
Заметим, что если для множества K выбрана ε-сеть, то под действием оператора $x \mapsto \lambda x$ она перейдет в $\lambda\varepsilon$-сеть для множества λK, а под действием отображения $x \mapsto x_0 + x$ она перейдет в ε-сеть для множества $x_0 + K$. Поэтому образ любого шара под действием компактного оператора вполне ограничен. Тем более образ произвольного подмножества произвольного шара вполне ограничен. Лемма доказана.

Теорема 20.1. *Множество компактных операторов обладает следующими свойствами (E, F, G — банаховы пространства):*

(i) $\mathcal{K}(E, F)$ *содержит все ограниченные операторы с конечномерным образом.*

(ii) $\mathcal{K}(E, F)$ *— замкнутое подпространство в* $\mathcal{L}(E, F)$.

(iii) Если $A \in \mathcal{K}(E, F)$, $B \in \mathcal{L}(F, G)$, $C \in \mathcal{L}(G, E)$, *то* $BA \in \mathcal{K}(E, G)$, $AC \in \mathcal{K}(G, F)$.

Доказательство.
(i) Для такого оператора образ единичного шара есть ограниченное множество, лежащее в конечномерном пространстве, т.е. оно вполне ограничено по стандартной евклидовой норме этого подпространства. Поскольку все нормы там эквивалентны, то множество вполне ограничено и по норме F, что влечет компактность оператора.

(ii) Как и в доказательстве предыдущего предложения, если $\{x_k\}$ — конечная ε-сеть для $A(U)$, где U — единичный шар, то $\{\lambda x_k\}$ — конечная $\lambda\varepsilon$-сеть для $(\lambda A)(U)$. Поэтому из компактности A следует компактность λA. Далее, если $\{x_k\}$ — конечная ε-сеть для $A(U)$, а $\{y_j\}$ — конечная ε-сеть для $B(U)$, то $\{x_k + y_j\}$ — конечная 2ε-сеть для $(A+B)(U)$, ибо

$$\|(A+B)x - (x_k + y_j)\| \leqslant \|Ax - x_k\| + \|Bx - y_j\|.$$

Наконец, если $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$, а $\{x_k\}$ — конечная ε-сеть для $A_n(U)$, то $\{x_k\}$ будет конечной 2ε-сетью для $A(U)$, поскольку

$$\|Ax - x_k\| = \|(A - A_n)x + A_n x - x_k\| \leqslant \|A - A_n\| \cdot \|x\| + \|A_n x - x_k\|.$$

Поэтому из компактности A_n и их сходимости к A по норме следует компактность A.

(iii) Заметим, что ограниченный оператор B переводит вполне ограниченное множество во вполне ограниченное множество. Действительно, если K — вполне ограниченное множество, а $\{x_k\}$ — ε-сеть для него, то $\{Bx_k\}$ будет $\|B\|\varepsilon$-сетью для $B(K)$. Поэтому, если A компактен, а B ограничен, U— единичный шар, то $BA(U)$ есть образ вполне ограниченного множества $A(U)$, т.е. вполне ограниченное множество. С другой стороны, если C ограничен, то $C(U)$ — ограниченное множество, а тогда компактный оператор A в силу леммы 20.1 переводит его в предкомпактное множество.

Теорема доказана.

Следствие. *В банаховом пространстве E существует хотя бы один компактный обратимый оператор (и среди них — всегда тождественный оператор) тогда и только тогда, когда E конечномерно.*

Доказательство.

Единичный оператор компактен только в конечномерном случае по доказанным нами ранее свойствам единичного шара. Если A – компактный обратимый оператор, то $I = A^{-1}A$ компактен в силу пункта (iii) теоремы.