Лекция 4 (20) по функциональному анализу 4 марта 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 18: Гильбертовы пространства. Ортонормированные системы (продолжение).

Важнейшим свойством ортонормированных систем является возможность разлагать элементы пространства в сходящиеся ряды по этим системам. Это свойство эквивалентно ряду других, и в разных книгах используется разная терминология.

Теорема 18.4. *Пусть $\{e_\alpha\}$ — ОНС в гильбертовом пространстве H. Следующие её свойства эквивалентны:*

1. *Для любого $x \in H$ выполнено равенство $x = \sum_{\alpha : \hat{x}(\alpha) \neq 0} \widehat{x}(\alpha) e_\alpha$* (система образует ортонормированный базис).
2. *Для любого $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_{\alpha : \hat{x}(\alpha) \neq 0} |\widehat{x}(\alpha)|^2$ (замкнутость системы).*
3. *Замыкание линейной оболочки системы есть всё пространство (тотальность системы).*
4. *Если для некоторого x все его коэффициенты равны нулю, то этот элемент нулевой (полнота системы).*

В неполном евклидовом пространстве свойства (1)–(3) эквивалентны, и из них следует (4).

Доказательство.

Возьмем элемент x и не более чем счетную подсистему в ОНС, состоящую из функций $\{e_{\alpha_k}\}$, для которых коэффициенты Фурье не равны нулю. Тогда для любого n по теореме 18.3 имеет место равенство

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(\alpha_k) e_{\alpha_k}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(\alpha_k)|^2.$$

Отсюда непосредственно видно, что для отдельно взятого x условия (1) и (2) эквивалентны, а тогда эквивалентны и утверждения, что (1) и (2) выполнены для всех x.

Импликация (1) $\to$ (3) непосредственно следует из определения линейной оболочки. Обратно, пусть некоторые полиномы P_n по ОНС сходятся к элементу x, например, $\|x - P_n\| < \frac{1}{n}$. Возьмем счетную систему, состоящую из всех e_{α_k}, участвующих в этих полиномах. Ряд $\sum_k \widehat{x}(\alpha_k) e_{\alpha_k}$ сойдется к x, т.к. если N столь велико, что $\{e_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N}$ содержит все члены из P_n, то по экстремальному свойству $\|x - \sum_{k=1}^{N} x(\alpha_k) e_{\alpha_k}\| \leqslant \|x - P_n\|$.

Импликация (2) $\to$ (4) очевидна.

Пусть теперь система в гильбертовом пространстве полна. Возьмем элемент x и рассмотрим ряд $\sum_{\alpha : \hat{x}(\alpha) \neq 0} \widehat{x}(\alpha) e_\alpha$. В силу неравенства Бесселя последовательность его частичных сумм фундаментальна, стало быть, он сходится к некоторому элементу $x_0 \in H$.

Но для любого β в силу непрерывности скалярного произведения имеем

$$\widehat{x}_0(\beta) = \langle \sum_{\alpha\,:\,\hat{x}(\alpha)\neq 0} \widehat{x}(\alpha) e_\alpha, e_\beta \rangle = \sum_{\alpha\,:\,\hat{x}(\alpha)\neq 0} \widehat{x}(\alpha)\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \widehat{x}(\beta).$$

Тогда $\widehat{x_0 - x}(\beta) = 0$, и из полноты (4) системы получаем, что $x = x_0$, а тогда система является базисом, т.е. верно (1). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании систем с этими свойствами.

Теорема 18.5. *В произвольном евклидовом пространстве существует полная ортонормированная система.*

Доказательство.

Упорядочим множество всех ортонормированных систем по включению. Оно непусто, т.к. любой отдельно взятый элемент единичной нормы образует ОНС. Любая цепь из ОНС имеет верхнюю грань, которой является объединение элементов цепи (два элемента этого объединения ортогональны друг другу, поскольку лежат в двух сравнимых ОНС, стало быть, лежат в одной ОНС). По лемме Цорна существует максимальный элемент X, который и будет полной ОНС: если существует ненулевой элемент, ортогональный всем элементам системы X, то его можно отнормировать и добавить к системе X, что противоречит её максимальности. Теорема доказана.

Следствие. *В произвольном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство.

Утверждение непосредственно вытекает из двух предыдущих теорем.

В случае сепарабельного пространства, удается отказаться от условия полноты пространства.

Теорема 18.6. *В произвольном сепарабельном евклидовом пространстве существует не более чем счетная ОНС, являющаяся базисом. Более того, ее можно выбрать в линейной оболочке произвольного счетного всюду плотного множества.*

Доказательство.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетное всюду плотное множество. Индуктивно выбросим те x_n, которые выражаются как линейные комбинации $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$. К оставшейся системе $\{y_n\}$ (для определенности, счетной), которая, очевидно, имеет ту же линейную оболочку, применим *процесс ортогонализации Грамма — Шмидта.* Положим $z_1 = y_1$, $e_1 = z_1/\|z_1\|$, а далее по индукции

$$z_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n, e_k\rangle e_k, \qquad e_n = z_n/\|z_n\|.$$

Деление возможно, так как равенство $z_n = 0$ противоречило бы линейной независимости системы. Каждый z_n ортогонален всем предыдущим, так как

$$\langle z_n, e_j\rangle = \langle y_n, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n, e_k\rangle\langle e_k, e_j\rangle = 0.$$

Матрица перехода от системы $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ к системе $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ — треугольная с ненулевой диагональю, следовательно, обратима. Поэтому линейные оболочки этих систем совпадают.

Тогда совпадают и линейные оболочки счетных систем $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Но первая из них равна линейной оболочке $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е плотна в пространстве. Мы показали, что построенная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ тотальна. По теореме 18.4 она является базисом. Теорема доказана.

Заметим, что если в пространстве есть несчетная ОНС, то оно несепарабельно (поскольку расстояние между двумя различными элементами ОНС всегда равно $\sqrt{2}$), а если в пространстве есть конечный ортонормированный базис, то оно конечномерно. Поэтому ортонормированный базис сепарабельного бесконечномерного евклидова пространства всегда счётен. Это позволяет установить результат об изоморфизме.

Теорема 18.7. *Любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство изометрически изоморфно l_2 над соответствующим полем. Любые два бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространства над одним полем изометрически изоморфны друг другу.*

Доказательство.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и сопоставим каждому элементу x последовательность его коэффициентов Фурье по этому базису; она лежит в l_2 по неравенству Бесселя. Полученный оператор $A : H \to l_2$ будет линеен в силу линейности способа определения коэффициентов Фурье и изометричен (следовательно, ограничен) в силу равенства Парсеваля, а потому инъективен. Осталось проверить его сюръективность. Для любой последовательность $\{x_k\} \in l_2$ частичные суммы ряда $\sum x_k e_k$ образуют фундаментальную последовательность, следовательно, в силу полноты пространства сходятся к некоторому элементу x. Из непрерывности скалярного произведения следует, что $\widehat{x}(k) = x_k$, т.е. $Ax = \{x_k\}$.

Вторая часть теоремы непосредственно следует из первой. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично можно доказать, что два гильбертовых пространства, ортонормированные базисы которых имеют равную мощность, изометрически изоморфны.

Теорема 18.8 (Рисс). *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда общий вид ЛНФ на нем таков: $f(x) = \langle x, y\rangle$, где $y \in H$, причем $\|f\| = \|y\|$.*

Доказательство.

Прежде всего, любой $y \in H$ по указанной формуле задает линейный (по 3 аксиоме скалярного произведения) функционал, который по неравенству КБШ непрерывен с оценкой $\|f\| \leqslant \|y\|$. Подставляя $x = y$, получаем в этой оценке равенство.

Пусть, напротив, задан линейный непрерывный функционал f. Если он нулевой, то берем $y = 0$. Иначе $\operatorname{Ker} f$ есть замкнутое (в силу непрерывности) подпространство, не совпадающее с H. Выберем $e \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$, где $\|e\| = 1$. Поскольку для любого элемента x справедливо равенство

$$x = \frac{f(x)}{f(e)}e + \left(x - \frac{f(x)}{f(e)}e\right),$$

где выражение в скобках есть элемент ядра, то тем самым $H = (\operatorname{Ker} f) \oplus \{\lambda e\}$, т.е. $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \{\lambda e\}$.

С другой стороны, если элемент x представлен в виде $x = \lambda e + z$, где $z \in \operatorname{Ker} f$, то по теореме 18.2 z есть ближайший к x элемент ядра, а тогда по экстремальному свойству коэффициентов Фурье имеем $\lambda = \langle x, e\rangle$. Сопоставляя эти равенства, видим, что

$$\frac{f(x)}{f(e)} = \langle x, e\rangle, \qquad \text{т.е.} \qquad f(x) = \langle x, \overline{f(e)}e\rangle.$$

Теорема доказана.

Полученная теорема показывает, что пространство, сопряженное к гильбертову, *сопряженно-линейно (антилинейно) изометрично* самому гильбертову. Это позволяет дать еще одно определение сопряженного оператора.

Определение. Оператор A^* на гильбертовом пространстве H называется (эрмитово) сопряженным к A, если для любых $x, y \in H$ выполнено равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Теорема 18.9. *Для любого ограниченного оператора A в гильбертовом пространстве H сопряженный оператор существует, единственен и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство.
Пусть A – ограниченный оператор. Тогда функция $f_y(x) = \langle Ax, y\rangle$ есть лнф на H. По теореме 18.8 найдется такой единственный $z \in H$, что $f_y(x) = \langle x, z\rangle$ и $\|z\| = \|f\|$. Положим по определению $A^*y = z$. Линейность почти очевидна: если

$$\langle Ax, y_1\rangle = \langle x, z_1\rangle \text{ и } \langle Ax, y_2\rangle = \langle x, z_2\rangle, \text{ то } \langle Ax, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \langle x, \alpha z_1 + \beta z_2\rangle.$$

Равенство норм и неравенство КБШ дает ограниченность:

$$\|A^*y\| = \|z\| = \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, y\rangle| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \|A\| \cdot \|y\|.$$

Наконец, из элементарного равенства $(A^*)^* = A$ получаем обратное неравенство. Теорема доказана.

В отличие от банахово сопряженного оператора, эрмитово сопряженный оператор действует не на сопряженном пространстве, а на том же. Теорема Рисса (теорема 18.8) показывает, что эти операторы в случае вещественного пространства можно отождествить. В комплексном случае, установленная в теореме Рисса изометрия является не линейной, а сопряженно-линейной, поэтому возникают нюансы, например: $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$, но $(\alpha A)' = \alpha A'$.

Важный (как мы увидим ниже) класс операторов в гильбертовом пространстве выделяется следующим определением.

Определение. Ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве H называется *самосопряженным*, если $A^* = A$.

Определение. Пусть H_0 — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве H. Тогда *(ортогональный) проектор* P_{H_0} на него определяется следующим образом. Рассмотрим разложение $H = H_0 \oplus H_0^\perp$, и для произвольного $x \in H$, представляющегося как $x = y + z$, положим $P_{H_0}x = y$.

Лемма 18.2. *Для любого замкнутого подпространства H_0 в гильбертовом пространстве H ортогональный проектор $P = P_{H_0}$ есть линейный ограниченный самосопряженный оператор, и если H_0 не вырождено, то $\|P\| = 1$.*

Доказательство.
Линейность оператора P следует из единственности разложения элемента x. Ограниченность и оценка нормы следуют из теоремы Пифагора: поскольку $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, то $\|y\| \leqslant \|x\|$, $\|P\| \leqslant 1$. Взяв ненулевой элемент $y \in H_0$, получим, что $Py = y$, откуда $\|P\| \geqslant 1$. Проверим самосопряженность. Пусть $x_k = y_k + z_k$, $k = 1, 2$. Тогда

$$\langle Px_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle = \langle x_1, Px_2 \rangle.$$

Лемма доказана.

Тема 19: Спектры операторов.

Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E над полем $\mathbb{C}$. Обозначим через I тождественный оператор на E. Напомним, что оператор A называется *обратимым*, если существует такой A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Теорема Банаха об обратном операторе гарантирует нам, что если оператор, обратный к ограниченному, существует, то он тоже ограничен. Композиция двух обратимых операторов всегда обратима (обратное неверно).

Определение. Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E над полем $\mathbb{C}$. Все комплексные числа можно разбить на две части: *спектр* $\sigma(A)$ оператора A — множество тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $A - \lambda I$ не обратим, и *резольвентное множество* $\rho(A)$ оператора A — множество тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $A - \lambda I$ обратим. Оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$, называется *резольвентой*. Обычно резольвента рассматривается как функция от λ со значениями в E.

Как известно из курса линейной алгебры, для оператора на конечномерном пространстве спектр совпадает с множеством его собственных значений, т.е. если оператор инъективен, то он автоматически сюръективен. В бесконечномерном случае это не так, что делает теорию спектров существенно сложнее и содержательнее.

Можно по-разному классифицировать спектры операторов. Мы дадим такую классификацию.

Определение. *Точечным спектром* $\sigma_p(A)$ оператора A называется множество его собственных значений, т.е. множество тех λ, для которых $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$.

Непрерывным спектром $\sigma_c(A)$ оператора A называется множество значений, для которых оператор $(A - \lambda I)$ инъективен, а его образ есть плотное в E подпространство, не совпадающее с E, т.е. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$, $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq E$, $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = E$.

Остаточным спектром $\sigma_r(A)$ называется множество остальных точек спектра, т.е. те λ, для которых $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$, $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} \neq E$.

Лемма 19.1. *Если $A \in \mathcal{L}(E)$, $\|A\| < 1$, то оператор $I - A$ обратим, и обратный оператор может быть выражен как сумма ряда:*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{*}$$

Доказательство.
Рассмотрим операторы $B_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$, где $A^0 = I$. Заметим, что при $m > n$ имеют место оценки

$$\|B_n - B_m\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} A^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|A^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k \leqslant \frac{\|A\|^{n+1}}{1-\|A\|}.$$

Итак, последовательность $\{B_n\}$ фундаментальна в полном пространстве $\mathcal{L}(E)$. Пусть B — ее предел, то есть сумма ряда; тогда $(I-A)B_n \to (I-A)B$ и $B_n(I-A) \to B(I-A)$. Но в то же время

$$B_n(I-A) = (I-A)B_n = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I - A^{n+1} \to I.$$

Итак, имеет место (*). Лемма доказана.

Теорема 19.1. *Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E над полем $\mathbb{C}$. Тогда*

(i) $\sigma(A)$ есть ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{C}$.

(ii) Для любого $\lambda_0 \in \rho(A)$ резольвента $R_\lambda(A)$ разлагается в окрестности λ_0 в ряд по неотрицательным степеням $(\lambda - \lambda_0)$ (с коэффициентами — операторами). В окрестности бесконечности резольвента $R_\lambda(A)$ разлагается в ряд по отрицательным степеням λ.

Доказательство.
Во-первых, если $|\lambda| > \|A\|$, то $A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$, где $\|\frac{1}{\lambda}A\| < 1$, так что по доказанной лемме оператор $(I - \frac{1}{\lambda}A)$ обратим, т.е. $\lambda \in \rho(A)$. Это означает, что спектр лежит в круге радиуса $\|A\|$. С учетом (*) получаем, что

$$R_\lambda(A) = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k}A^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-A^k)\frac{1}{\lambda^{k+1}}.$$

Во-вторых, если $\lambda_0 \in \rho(A)$, то

$$A - \lambda I = (A - \lambda_0 I) + (\lambda_0 - \lambda)I = (A - \lambda_0 I)\Big(I - (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}\Big).$$

При $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|$ получаем, что оператор в скобках обратим по лемме, а тогда и $A - \lambda I$ обратим как композиция. Поэтому резольвентное множество открыто, а спектр замкнут. Подставляя (*) в последнее выражение, получаем

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda_0 I)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^k((A - \lambda_0 I)^{-1})^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}((A - \lambda_0 I)^{-1})^{k+1}(\lambda - \lambda_0)^k.$$

Теорема доказана.

Наша следующая задача — доказать, что спектр непуст. Можно было бы развить теорию операторных функций, зависящих от параметра и разлагающихся в ряды по его степеням, аналогичную теории голоморфных функций, и вывести непустоту спектра из операторного аналога теоремы Лиувилля. Мы применим другой метод – сведём задачу к обычной теореме Лиувилля для голоморфных функций.