

Лекция 3 (19) по функциональному анализу 25 февраля 2021 года,
мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 17: Сопряженные пространства (окончание).

Определение. Множество A в нормированном пространстве E называется *слабо ограниченным*, если для любого функционала $f \in E^*$ числовое множество $\{f(x)\}_{x \in A}$ ограничено.

Определение. Последовательность точек $\{x_n\}$ в нормированном пространстве E называется *слабо сходящейся к x* , если для любого функционала $f \in E^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x)$.

Каноническое вложение j пространства во второе сопряженное дает возможность получить следствие из теоремы Банаха — Штейнгауза.

Теорема 17.5. Множество в нормированном пространстве ограничено тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено.

Доказательство.

Слабая ограниченность ограниченного множества непосредственно следует из определения нормы функционала (оценки $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$).

Обратно, пусть A слабо ограничено. Рассмотрим семейство функционалов $j(A)$ на полном (по теореме 15.2) пространстве E^* . Слабая ограниченность множества A в точности означает поточечную ограниченность множества $j(A)$. По теореме Банаха — Штейнгауза $j(A)$ ограничено. В силу изометричности оператора j множество A ограничено. Теорема доказана.

В то же время, оказывается, что понятие слабой сходимости и сходимости по норме, вообще говоря, не совпадают, и первое из них может обладать полезными свойствами, отсутствующими у второго.

Отметим также, что, рассматривая последовательность функционалов, можно говорить о её слабой сходимости (используя элементы второго сопряженного пространства), а можно рассмотреть другое, не менее естественное определение, совпадающее со слабой сходимостью в случае рефлексивного пространства.

Определение. Последовательность функционалов $\{f_n\}$ на нормированном пространстве E называется **-слабо сходящейся к f* , если для любого элемента $x \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$.

Теорема 17.6. Пусть E — сепарабельное нормированное пространство. Тогда из любой ограниченной последовательности элементов E^* можно выбрать *-слабо сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

Пусть $f_n \in E^*$, $\|f_n\| \leq C$. Возьмем в X всюду плотное множество $\{x_k\}$. Для каждого k числовая последовательность $\{f_n(x_k)\}_n$ ограничена, поэтому из нее и из любой ее подпоследовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Выберем из исходной последовательности $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n,1}\}$, сходящуюся в точке x_1 , из нее — подпоследовательность $\{f_{n,2}\}$, сходящуюся и в точке x_2 и так далее по

индукции. Диагональная последовательность $\{f_{n,n}\}$ будет сходиться на каждом x_k . Если теперь $x \in X$ — любой, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k , что $\|x - x_k\| < \varepsilon$. Тогда при достаточно больших m, n имеем

$$\begin{aligned} \|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)\| &\leq \|f_{n,n}(x_k) - f_{n,n}(x)\| + \|f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)\| + \\ &\quad + \|f_{m,m}(x_k) - f_{m,m}(x)\| \leq 2C\varepsilon + \|f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)\| \leq (2C + 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. числовая последовательность $\{f_{n,n}(x)\}$ фундаментальна, стало быть, сходится. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема является частным случаем более общей теоремы Банаха — Алаоглу — Бурбаки о компактности шара в *-слабой топологии.

Тема 18: Гильбертовы пространства. Ортонормированные системы.

Определение. Евклидовым (предгильбертовым) пространством называется линейное пространство H с функцией $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2 \rightarrow \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), называемой *скалярным произведением* и удовлетворяющей следующим аксиомам:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (в вещественном случае $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$).
3. $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$.

Замечание. Из второй и третьей аксиом в комплексном случае следует, что

$$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\beta} \langle x, y_2 \rangle,$$

а в вещественном случае — что

$$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle.$$

Теорема 18.1 (неравенство Коши — Буняковского — Шварца). Для любых элементов x, y евклидова пространства справедлива оценка

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Доказательство.

При $\langle x, y \rangle = 0$ неравенство тривиально. В противном случае, оба вектора ненулевые. Так как при любом $t \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$0 \leq \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t \langle y, x \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle,$$

то дискриминант этого квадратного трехчлена вещественной переменной t не положителен, т.е.

$$(\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0, \text{ т.е. } |\operatorname{Re} \langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Выберем $\theta \in \mathbb{R}$ так, чтобы $e^{i\theta} \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$. Тогда, поскольку $\langle e^{i\theta} x, e^{i\theta} x \rangle = e^{i\theta} e^{-i\theta} \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$, получаем, что

$$|\langle x, y \rangle| = e^{i\theta} \langle x, y \rangle = \langle e^{i\theta} x, y \rangle = |\operatorname{Re} \langle e^{i\theta} x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle e^{i\theta} x, e^{i\theta} x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ является нормой на евклидовом пространстве.

Доказательство.

Первая аксиома нормы следует из первой аксиомы скалярного произведения. Вторая следует из того, что $\langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle$. Наконец, из теоремы 18.1 имеем

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

что после извлечения квадратного корня дает неравенство треугольника. Следствие доказано.

Определение. Функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ на евклидовом пространстве называется *евклидовой нормой* или *нормой*, порожденной скалярным произведением. Евклидово пространство, полное относительно этой нормы (точнее, относительно порожденной ею метрики) называется *гильбертовым*.

Определение. Элементы x и y евклидова пространства H называются *ортогональными*, если $\langle x, y \rangle = 0$. *Ортогональным дополнением* к множеству $A \subset H$ называется $A^\perp = \{x \in H : \forall y \in A \langle x, y \rangle = 0\}$.

Для двух ортогональных элементов x и y имеет место равенство $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора). Действительно, $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 0 + 0 + \langle y, y \rangle$. Аналогично для n попарно ортогональных элементов x_n выполнено равенство $\|\sum_{k=1}^n x_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$.

Из теоремы Пифагора немедленно вытекает, что если A — линейное подпространство, то любой элемент $A^\perp$ с единичной нормой является 0-перпендикуляром к A в смысле ранее дававшегося определения.

Лемма 18.1. Ортогональное дополнение к любому множеству A есть замкнутое линейное подпространство.

Доказательство.

Если $z_1, z_2 \in A^\perp$, то для любого $y \in A$ имеем $\langle \alpha z_1 + \beta z_2, y \rangle = \alpha \langle z_1, y \rangle + \beta \langle z_2, y \rangle = 0 + 0 = 0$, так что $\alpha z_1 + \beta z_2 \in A^\perp$. Замкнутость следует из непрерывности скалярного произведения: если $z_n \rightarrow z$, $z_n \in A^\perp$, то по неравенству КБШ $|\langle z_n, y \rangle - \langle z, y \rangle| \leq \|z_n - z\| \cdot \|y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Определение. Суммой $H_1 + H_2$ двух подпространств H_1 и H_2 называется множество элементов, представимых в виде $x = y + z$, где $y \in H_1$, $z \in H_2$. Сумма называется *прямой*, если $H_1 \cap H_2 = \{0\}$. Нетрудно видеть, что для прямой суммы представление $x = y + z$ единственно (если $y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, то $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in H_1 \cap H_2$).

Сумма называется *ортогональной* и обозначается $H_1 \oplus H_2$, если для любых $y \in H_1$, $z \in H_2$ выполнено $\langle y, z \rangle = 0$.

Ортогональная сумма всегда является прямой, потому что если $y = z \in H_1 \cap H_2$, то $\|y\|^2 = \langle y, z \rangle = 0$. Ортогональная сумма двух замкнутых подпространств есть замкнутое подпространство (если $\{y_n + z_n\}$ сходится, то по теореме Пифагора $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся по отдельности).

Теорема 18.2. Пусть H_0 — замкнутое линейное подпространство в гильбертовом пространстве H . Тогда для любого элемента $x_0 \in H$ существует единственный элемент $y_0 \in H_0$, для которого $\|x_0 - y_0\| = \text{dist}(x_0, H_0)$. При этом $z_0 = x_0 - y_0 \in H_0^\perp$.

Доказательство.

Прежде всего, заметим, что из определения нормы непосредственно следует, что в любом евклидовом пространстве выполнено *тождество параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(проверяется элементарными выкладками). Пусть $\{y_n\}$ — такая последовательность элементов H_0 , что

$$\|x_0 - y_n\| \rightarrow d = \text{dist}(x_0, H_0) = \inf_{y \in H_0} \|x_0 - y\|.$$

Тогда из тождества параллелограмма имеем

$$\|y_n - y_m\|^2 + \|(x_0 - y_n) + (x_0 - y_m)\|^2 = 2\|x_0 - y_n\|^2 + 2\|x_0 - y_m\|^2.$$

Поскольку $\frac{y_n + y_m}{2} \in H_0$, то

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x_0 - y_n\|^2 + 2\|x_0 - y_m\|^2 - 4\|x_0 - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \leq 2\|x_0 - y_n\|^2 + 2\|x_0 - y_m\|^2 - 4d^2.$$

С ростом n и m правая часть неравенства стремится к нулю, стало быть, последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. В силу замкнутости H_0 и полноты H она сходится к $y_0 \in H_0$. В силу непрерывности нормы $\|x_0 - y_0\| = d$. Если y'_0 — еще один такой элемент, то последовательность $\{y_0, y'_0, y_0, y'_0, \dots\}$ по доказанному фундаментальна, то есть $y_0 = y'_0$. Нам осталось проверить, что $z_0 = x_0 - y_0 \in H^\perp$. Для этого заметим, что для любого ненулевого $y \in H_0$ и любого скаляра $t \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$d^2 = \|z_0\|^2 \leq \|x_0 - (y_0 - ty)\|^2 = \|z_0 + ty\|^2 = d^2 + 2t \text{Re} \langle z_0, y \rangle + t^2 \|y\|^2.$$

Итак, этот квадратный трехчлен от t достигает минимума при $t = 0$, а потому $\text{Re} \langle z_0, y \rangle = 0$. Но если бы $\text{Im} \langle z_0, y \rangle \neq 0$ для некоторого $y \in H_0$, то, взяв вектор $iy \in H_0$, мы пришли бы к противоречию с предыдущим. Теорема доказана.

Следствие. Пусть H_0 — замкнутое линейное подпространство в гильбертовом пространстве H . Тогда $H = H_0 \oplus H_0^\perp$.

Доказательство.

Сумма пространства и его ортогонального дополнения является ортогональной по определению. Любой элемент из H представляется в виде суммы элемента H_0 (а именно, ближайшего) и элемента $H_0^\perp$ по теореме. Следствие доказано.

Примеры евклидовых пространств

1. Конечномерные пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}.$$

2. Пространство l_2 со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

3. Пространство $L_2(X, M, \mu)$ со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \int_X x(t) \overline{y(t)} d\mu.$$

Ортогональные системы и ряды Фурье

Определение. Система ненулевых элементов $\{e_\alpha\}$ евклидова пространства называется *ортогональной*, если любые два различных элемента этой системы ортогональны между собой. Ортогональная система называется *ортонормированной* (ОНС), если норма любого ее элемента равна единице.

Далее, говоря об ОНС, всегда будем подразумевать, что пространство не вырождено.

Определение. Коэффициентами Фурье элемента x евклидова пространства H по ОНС $\{e_\alpha\}$ называются числа $c_\alpha(x) = \hat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha \rangle$.

Определение. Формальным рядом Фурье элемента x евклидова пространства H по ОНС $\{e_\alpha\}$ называется

$$x \sim \sum_{\alpha} \hat{x}(\alpha) e_{\alpha}.$$

Мы вскоре докажем, что справа может быть не более чем счетное количество ненулевых слагаемых, поэтому знак суммы корректен.

Можно также рассматривать коэффициенты и ряды Фурье по ненормированной ортогональной системе, вводя надлежащие поправки. Именно, если $\{\varphi_\alpha\}$ — ненормированная ортогональная система, то коэффициентами Фурье по ней назовём $c'_\alpha(x) = \frac{1}{\|\varphi_\alpha\|^2} \langle x, \varphi_\alpha \rangle$, с тем, чтобы выполнялось равенство

$$c'_\alpha(x) \varphi_\alpha = \frac{1}{\|\varphi_\alpha\|^2} \langle x, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha = \langle x, \frac{1}{\|\varphi_\alpha\|} \varphi_\alpha \rangle \frac{1}{\|\varphi_\alpha\|} \varphi_\alpha,$$

где функции $\{\frac{1}{\|\varphi_\alpha\|} \varphi_\alpha\}$ образуют уже ортонормированную систему.

Теорема 18.3 (экстремальное свойство и тождество Бесселя). Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — конечная ОНС в H , а x — некоторый элемент H . Тогда

$$\|x - \sum_{k=1}^n \hat{x}(k) e_k\|^2 = \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{x}(k)|^2.$$

Доказательство.

По свойствам скалярного произведения и определению коэффициентов Фурье и ОНС имеем

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_k \alpha_k \langle e_k, x \rangle - \sum_k \overline{\alpha_k} \langle x, e_k \rangle + \sum_{k,j} \alpha_k \overline{\alpha_j} \langle e_k, e_j \rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_k \alpha_k \overline{\hat{x}(k)} - \sum_k \overline{\alpha_k} \hat{x}(k) + \sum_k |\alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Прибавляя и вычитая величину $\sum_{k=1}^n |\hat{x}(k)|^2$, получаем, что

$$\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{x}(k)|^2 + \sum_{k=1}^n |\hat{x}(k) - \alpha_k|^2.$$

Отсюда непосредственно следуют оба утверждения теоремы.

Следствие.

1. Для любого элемента x и любой конечной ОНС выполнено неравенство Бесселя

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |\hat{x}(k)|^2.$$

2. Для любого элемента x и любой ОНС лишь не более чем счетное число коэффициентов $\hat{x}(\alpha)$ отличны от нуля.
3. Для любого элемента x и любой ОНС выполнено неравенство Бесселя

$$\|x\|^2 \geq \sum_k |\hat{x}(\alpha_k)|^2,$$

где сумма берется по всем ненулевым коэффициентам.

Доказательство.

Первое утверждение непосредственно следует из тождества Бесселя. Тогда для любого натурального p число коэффициентов, больших по модулю, чем $\frac{1}{p}$, не превосходит $p^2\|x\|^2$, т.е. конечно, а число всех ненулевых коэффициентов тем самым счетно. Третье утверждение получается из первого предельным переходом. Следствие доказано.

Важнейшим свойством ортонормированных систем является возможность разлагать элементы пространства в сходящиеся ряды по этим системам. О нём мы поговорим на следующей лекции.

Примеры ортогональных систем

1. Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.
2. Стандартные орты $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$ в l_2 .
3. Тригонометрическая система $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в $L_2([-\pi, \pi])$.