Лекция 1 (17) по функциональному анализу 11 февраля 2021 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 15: Линейные непрерывные операторы в нормированных пространствах

Мы будем рассматривать линейные (в частности, нормированные) пространства над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Элементы пространства будем называть векторами, а элементы поля — скалярами.

Как известно, линейным оператором из линейного пространства E в линейное пространство F называется такое отображение A, что для любых скаляров α, β и векторов x, y выполнено равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Если E и F — не просто линейные, а нормированные пространства, то можно воспользоваться обычным определением непрерывной функции и говорить о линейном непрерывном операторе. Нам важно, что непрерывность линейного оператора допускает эквивалентное описание, к которому мы сейчас и перейдем.

Определение. Линейный оператор из нормированного пространства E в нормированное пространство F называется *ограниченным*, если существует такая постоянная C, что для любого $x \in E$ выполнено неравенство $\|Ax\|_F \leqslant C\|x\|_E$. Точная нижняя грань таких постоянных называется *нормой оператора*:

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \|Ax\|_F.$$

Равенство этих трех супремумов следует из однородности нормы (второй аксиомы нормированного пространства): для любого ненулевого вектора x

$$\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \left\| A\frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F, \text{ где } \left\| \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_E = 1.$$

Теорема 15.1. *Пусть A — линейный оператор из нормированного пространства E в нормированное пространство F. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) A ограничен;
(ii) A переводит некоторый шар в ограниченное множество;
(iii) A непрерывен в каждой точке пространства;
(iv) A непрерывен в некоторой точке пространства;
(v) A непрерывен в нуле.

Доказательство.
Импликации (i)$\to$(ii) и (iii)$\to$(iv) тривиальны.

(ii)$\to$(i): Если $\|Ax\| \leqslant C$ при $\|x-x_0\| \leqslant R$, то по неравенству треугольника $\|A(x-x_0)\| \leqslant \|Ax\|+\|Ax_0\| \leqslant 2C$, т.е. $\|Ay\| \leqslant 2C$ при $\|y\| \leqslant R$, а тогда при $\|z\| \leqslant 1$ в силу однородности нормы имеем $\|R \cdot Az\| = \|A(Rz)\| \leqslant 2C$, то есть $\|Az\| \leqslant 2C/R$.

(i)$\to$(iii): Если $x_n \to x$, то $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x\| \to 0$.

(iv)$\to$(v): Пусть оператор непрерывен в точке x_0. Тогда если $x_n \to 0$, то $x_0 + x_n \to x_0$, $A(x_n + x_0) \to Ax_0$, откуда по линейности $Ax_n \to 0$.

(v)$\to$(ii): Пусть оператор непрерывен в нуле. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при $\|x\| = \|x - 0\| \leqslant \delta$ выполняется оценка $\|Ax\| \leqslant 1$. Тем самым оператор ограничен на шаре $B_\delta(0)$. Теорема доказана.

Если пара нормированных пространств E и F фиксирована, то линейные операторы, действующие из E в F, можно складывать и умножать на скаляры по естественным формулам

$$(A + B)x = Ax + Bx, \qquad (\alpha A)(x) = \alpha \cdot Ax.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(E, F)$ множество всех линейных ограниченных операторов из E в F.

Теорема 15.2.

(i) Пространство $\mathcal{L}(E, F)$ — линейное, а определенная выше норма оператора является нормой на нем.

(ii) Если F полно, то $\mathcal{L}(E, F)$ полно.

Доказательство.

(i) Свойства нормы и свойства супремума дают оценки

$$\sup_{\|x\|=1} \|(\alpha A)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha(Ax)\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \cdot \|Ax\|,$$

т.е. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, и

$$\sup_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|,$$

т.е. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$. В частности, сумма ограниченных операторов есть снова ограниченный оператор. То, что норма равна нулю у нулевого оператора и только у него, очевидно.

(ii) Пусть $\{A_n\}$ — последовательность операторов из пространства $\mathcal{L}(E, F)$, фундаментальная по его норме. Тогда для любого $x \in E$ в силу неравенства $\|A_n x - A_m x\| \leqslant \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|$ видим, что последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в пространстве F и сходится в силу его полноты к некоторому его элементу, который мы обозначим как Ax. Из линейности предела видно, что A — линейный оператор:

$$A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y \to \alpha Ax + \beta Ay.$$

Далее, так как фундаментальная последовательность ограничена, то $C = \sup_n \|A_n\| < \infty$, а тогда для любого x, $\|x\| \leqslant 1$, имеем

$$\|Ax\| = \lim_n \|A_n x\| \leqslant \sup_n \|A_n x\| \leqslant \sup_n \|A_n\| \cdot \|x\| = C\|x\| \leqslant C.$$

Итак, A ограничен. Осталось проверить сходимость по норме. Но если N таково, что при $k, n > N$ выполнено неравенство $\|A_n - A_k\| < \varepsilon$, то для любого x, $\|x\| \leqslant 1$, имеем $\|A_n x - A_k x\| < \varepsilon$, а в пределе при $k \to +\infty$ — $\|A_n x - Ax\| \leqslant \varepsilon$, т.е. $\|A_n - A\| \leqslant \varepsilon$ при $n > N$. Теорема доказана.

Важнейшим частным случаем линейного оператора является *линейный функционал* — оператор из пространства E в поле, над которым это пространство задано. Подробнее мы поговорим о них позднее. Сейчас же отметим, что пространство линейных непрерывных функционалов всегда полно, поскольку $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ суть полные пространства.

Отметим два важных результата, связанные с линейными операторами в банаховых пространствах.

Теорема 15.3 (принцип равномерной ограниченности, или теорема Банаха — Штейнгауза). *Пусть E — банахово пространство, F — нормированное пространство, $\{A_\alpha\}$ — семейство операторов из $\mathcal{L}(E,F)$, и для любого $x \in E$ величина $C(x) = \sup_\alpha \|A_\alpha x\|$ конечна. Тогда $\sup_\alpha \|A_\alpha\| < \infty$.*

Доказательство.

Положим $E_n = \{x \in E \,:\, C(x) \leqslant n\}$. Тогда в силу непрерывности каждого из операторов множества E_n замкнуты. По условию они покрывают E. Но E полно, следовательно, по теореме Бэра хотя бы одно из этих множеств не является нигде не плотным, что в силу замкнутости означает, что оно содержит некоторый шар: $E_{n_0} \supset \bar{B}_r(x_0)$. Тогда для любого α и для любого x, $\|x\| \leqslant 1$, получаем, что

$$\|A_\alpha x\| = \frac{1}{r}\|A_\alpha(rx)\| = \frac{1}{r}\|A_\alpha(rx+x_0) - A_\alpha x_0\| \leqslant \frac{1}{r}(\|A_\alpha(rx+x_0)\| + \|A_\alpha x_0\|) \leqslant \frac{2n_0}{r},$$

то есть $\|A_\alpha\| \leqslant \frac{2n_0}{r}$. Теорема доказана.

Теорема 15.4 (Банаха об обратном операторе, без доказательства). *Пусть X и Y — банаховы пространства, а оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ биективен. Тогда обратный оператор ограничен.*

Тема 16: Продолжение линейных непрерывных операторов

Мы переходим к вопросу о продолжении линейного непрерывного оператора, заданного на подпространстве, до оператора на всём пространстве с сохранением нормы. Начнем с относительно простого случая, когда оператор задан на плотном подпространстве.

Теорема 16.1. *Пусть E — нормированное пространство, F — банахово пространство, E_0 — плотное подпространство в E и задан ограниченный оператор $A_0 \in \mathcal{L}(E_0,F)$. Тогда существует единственное его продолжение до оператора $A \in \mathcal{L}(E,F)$, причем $\|A\| = \|A_0\|$.*

Доказательство.

Рассмотрим произвольную точку $x \in E$ и сходящуюся к ней последовательность $\{x_n\}$ точек E_0. Тогда, поскольку $\|A_0 x_n - A_0 x_m\| \leqslant \|A_0\|\,\|x_n - x_m\|$, то последовательность $\{A_0 x_n\}$ фундаментальна, и в силу полноты F имеет предел, который мы обозначим через Ax.

Стандартным образом (перемешиванием двух последовательностей) доказывается, что предел не зависит от выбора $\{x_n\}$, а только от их предела в E, в частности, $A_0 x = Ax$ на E_0. Ясно, что любое другое продолжение не будет непрерывным, т.е. единственность имеет место.

Если $E_0 \ni x_n \to x$ и $E_0 \ni y_n \to y$, то $E_0 \ni \alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$. Поэтому продолженный оператор линеен. Наконец, если $x_n \to x \neq 0$, $Ax_n \to Ax$, то $\|Ax_n\|/\|x_n\| \to \|Ax\|/\|x\|$, поэтому норма продолженного оператора равна норме исходного. Теорема доказана.

В случае произвольного подпространства задача продолжения оператора с сохранением нормы, вообще говоря, не имеет решения в банаховом пространстве. Её можно решить в гильбертовом пространстве, о чем мы скажем позднее. Пока же разберем другой важный случай, когда задача продолжения с сохранением нормы разрешима — случай, когда продолжается линейный непрерывный функционал. Соответствующий результат получается как следствие несколько более общего — теоремы Хана — Банаха.

Определение. Неотрицательная функция p на линейном пространстве называется *полунормой*, если $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ и $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ (то есть отличие от нормы в том, что нулевое значение может приниматься не только на нулевом элементе).

Определение. Вещественнозначная функция p на вещественном линейном пространстве называется *однородно-выпуклой (выпуклым функционалом)*, если $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ при $\alpha \geqslant 0$ и $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Выпуклый функционал удовлетворяет также условию $p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y)$, $t \in (0,1)$, а при $p(-x) \equiv p(x)$ является полунормой (но только на вещественном пространстве!)

Теорема 16.2 (вещественный вариант теоремы Хана — Банаха). *Пусть E — вещественное линейное пространство, E_0 — подпространство в нем, p — выпуклый функционал на E, f_0 — линейный функционал на E_0, удовлетворяющий всюду на E_0 условию $f_0(x) \leqslant p(x)$. Тогда f_0 можно продолжить до линейного функционала f на E, удовлетворяющего всюду на E условию $f(x) \leqslant p(x)$.*

Первая часть доказательства теоремы Хана — Банаха.

Мы начнем доказательство со случая, когда E есть линейная оболочка E_0 и еще одного вектора z. Тогда продолжение однозначно определяется выбором числа $c = f(z)$, поскольку

$$f(x) = f(x_0 + tz) = f(x_0) + tf(z) = f_0(x_0) + tc, \qquad x_0 \in E_0.$$

Итак, нам требуется, чтобы при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in E_0$ выполнялось неравенство

$$f_0(x_0) + tc \leqslant p(x_0 + tz).$$

При $t > 0$, вынося t и поделив на него, получаем требование

$$f_0(t^{-1}x_0) + c \leqslant p(t^{-1}x_0 + z), \qquad c \leqslant p(t^{-1}x_0 + z) - f_0(t^{-1}x_0),$$

а при $t < 0$, вынося $(-t) > 0$ и поделив на него, получаем требование

$$-f_0(t^{-1}x_0) - c \leqslant p(-t^{-1}x_0 - z), \qquad c \geqslant -p(-t^{-1}x_0 - z) - f_0(t^{-1}x_0).$$

Чтобы эти требования были совместимы, (необходимо и) достаточно, чтобы для любых $y', y'' \in E_0$ выполнялась бы оценка

$$-p(-y' - z) - f_0(y') \leqslant p(y'' + z) - f_0(y'').$$

Но эта оценка верна, поскольку

$$f_0(y'') - f_0(y') = f_0(y'' - y') \leqslant p(y'' - y') = p(y'' + z - y' - z) \leqslant p(y'' + z) + p(-y' - z).$$

Итак, первая часть доказательства закончена.

Она позволяет по индукции доказать теорему для случая, когда E — линейная оболочка не более чем счетной системы, а это позволяет решить задачу продолжения лнф для замыкания такой линейной оболочки, т.е. для сепарабельных нормированных пространств. Чтобы доказать теорему в общем случае, нам понадобится трансфинитная индукция, которую мы проведем с помощью леммы Цорна.

Определение. Пусть на множестве задан (частичный) порядок. *Цепью* называется линейно упорядоченное подмножество, то есть такое подмножество, в котором любые два элемента сравнимы. Элемент x называется *максимальным* элементом подмножества, если в этом подмножестве нет строго большего элемента. Элемент называется *верхней гранью подмножества*, если он больше или равен любого элемента подмножества.

Аксиома (Лемма Цорна). *Если любая цепь в упорядоченном множестве имеет верхнюю грань, то любой элемент множества подчинен некоторому максимальному для всего множества (т.е. меньше или равен некоторого максимального).*

Лемма Цорна является одним из утверждений, эквивалентных аксиоме выбора.

Доказательство эквивалентности можно найти, например, в книге К. Куратовского и А. Мостовского «Теория множеств», глава 7, параграф 8.

Вторая часть доказательства теоремы Хана — Банаха.

Пусть задан линейный функционал f_0 на подпространстве E_0, ограниченный сверху выпуклым функционалом p. Рассмотрим множество пар (E', f'), где $E' \supset E_0$ — подпространство, а f' — некоторое продолжение f_0 на это подпространство, ограниченное сверху функционалом p. На этом множестве пар введем отношение порядка: $(E_1, f_1) \prec (E_2, f_2)$, если $E_1 \subset E_2$ и $f_2 |_{E_1} = f_1$. Проверим, что всякая цепь имеет верхнюю грань. Пусть $\{(E_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — цепь. Положим $E' = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha$. Если $x \in E'$, то для некоторого α_1 имеем $x \in E_{\alpha_1}$; положим $f'(x) = f_{\alpha_1}(x)$. Если к тому же $x \in E_{\alpha_2}$, то либо $(E_{\alpha_1}, f_{\alpha_1}) \prec (E_{\alpha_2}, f_{\alpha_2})$, либо $(E_{\alpha_2}, f_{\alpha_2}) \prec (E_{\alpha_1}, f_{\alpha_1})$; в обоих случаях $f_{\alpha_1}(x) = f_{\alpha_2}(x)$. Поэтому $f'(x)$ корректно определен на E'. При этом автоматически $f'(x) = f_{\alpha_1}(x) \leqslant p(x)$ и $f'(x) = f_0(x)$ на E_0. Нужно еще проверить его линейность. Действительно, пусть выбраны элементы $x_1, x_2 \in E'$. Тогда $x_1 \in E_{\alpha_1}$, $x_2 \in E_{\alpha_2}$. Для определенности предположим, что $(E_{\alpha_1}, f_{\alpha_1}) \prec (E_{\alpha_2}, f_{\alpha_2})$. Тогда

$$f'(c_1x_1 + c_2x_2) = f_{\alpha_2}(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1 f_{\alpha_2}(x_1) + c_2 f_{\alpha_2}(x_2) = c_1 f'(x_1) + c_2 f'(x_2).$$

Итак, (E', f') — верхняя грань для цепи. Тогда по лемме Цорна элемент (E_0, f_0) подчинен некоторому максимальному элементу $(\tilde{E}, \tilde{f})$. Предположим, что $\tilde{E} \neq E$. Тогда возьмем вектор $\tilde{x} \in E \setminus \tilde{E}$ и применим к пространству $\tilde{E}$ и вектору $\tilde{x}$ утверждение, полученное в первой части доказательства. Мы получим пару, строго превосходящую элемент $(\tilde{E}, \tilde{f})$, что противоречит максимальности этого элемента. Итак, $\tilde{E} = E$, то есть мы доказали возможность продолжения на всё пространство. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть E — вещественное линейное пространство, E_0 — подпространство в нем, p — полунорма на E, f_0 — линейный функционал на E_0, удовлетворяющий всюду на E_0 условию $|f_0(x)| \leqslant p(x)$. Тогда f_0 можно продолжить до линейного функционала f на E, удовлетворяющего всюду на E условию $|f(x)| \leqslant p(x)$.*

Доказательство.

Всякая полунорма есть выпуклый функционал. Поэтому, согласно доказанной теореме, можно продолжить f_0 до линейного функционала f, удовлетворяющего неравенству $f(x) \leqslant p(x)$. Подставляя сюда вектор $(-x)$, получим, что $f(-x) \leqslant p(x)$, то есть $-f(x) \leqslant p(x)$, или $-p(x) \leqslant f(x)$, что по определению модуля дает неравенство $|f(x)| \leqslant p(x)$. Следствие доказано.

Прежде чем выводить из теоремы Хана — Банаха дальнейшие утверждения про продолжение функционалов, приведем еще одно применение леммы Цорна.

Лемма 16.1. *Пусть E — бесконечномерное линейное пространство. Тогда в нем существует* алгебраический базис, *то есть линейно независимая система, через которую можно (единственным образом) выразить любой элемент пространства. Более того, любую линейно независимую систему элементов пространства можно дополнить до базиса.*

Доказательство.

Рассмотрим множество всех линейно независимых систем элементов E. Упорядочим его по включению: $\{x_\alpha\} \subset \{y_\beta\}$. Проверим, что всякая цепь имеет верхнюю грань. Рассмотрим системы $X_t = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A_t}$, образующие цепь $\{X_t\}_{t \in T}$. Положим $X = \bigcup_{t \in T} X_t$. Проверим, что эта система линейно независима; тогда она, очевидно, будет верхней гранью для цепи. Пусть в системе X есть нетривиальная линейная зависимость $\sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k} = 0$. Выберем для каждого k такое t_k, что $\alpha_k \in A_{t_k}$. Так как все системы X_{t_k} сравнимы между собой как элементы цепи, то можно из них них наибольшую, т.е. содержащую в себе все остальные: $x_{\alpha_k} \in X_{t_k} \subset X_{t_{k_0}}$ при всех k. Но тогда система $X_{t_{k_0}}$ линейно зависима, и мы пришли к противоречию. Итак, все условия леммы Цорна выполнены, и значит, для любой линейно независимой системы элементов существует максимальная линейно независимая система, содержащая ее как подмножество.

Покажем, что максимальная система и есть алгебраический базис. Пусть $X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — максимальная линейно независимая система. Тогда для любого элемента $y \notin X$ система $X \cup \{y\}$ уже не является линейно независимой. Тогда можно указать нетривиальную линейную зависимость

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k} = c_0 y.$$

Равенство $c_0 = 0$ невозможно — тогда система X линейно зависима. Поэтому, поделив на c_0, получаем выражение для y как для линейной комбинации элементов системы X. Если бы имелось два таких выражения, то, приравнивая их друг к другу, мы получили бы линейную зависимость в X. Предложение доказано.