Лемма 1. *Пусть X_0 — конечномерное подпространство банахова пространства X. Тогда оно дополняемо (существует замкнутое подпространство X_1, такое что $X = X_0 \oplus X_1$).*

Доказательство. Пусть $\dim X_0 = n$, $e_1, \ldots, e_n$ — нормированный базис пространства X_0, $f_1, \ldots, f_n$ — биортогональный базис в X_0^*. По теореме Хана-Банаха продолжим f_i до функционалов на всём пространстве X. Определим проектор на X_0

$$P(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k, \quad \|P\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\| \|e_k\| = n.$$

Он ограничен, следовательно по теореме Банаха (об обратном операторе) получаем, что пространства X_0 и X_1 замкнуты (замкнутость X_0 вытекает также из его конечномерности). □

Лемма 2. *Пусть $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда* $\mathrm{Im}(I - A)$ *замкнут.*

Доказательство. Представим $X = X_0 \oplus X_1$, где $X_0 = \mathrm{Ker}(I - A)$. Так как X_0 конечномерно, то X_1 замкнуто.

Тогда $\mathrm{Im}(I - A) = \mathrm{Im}\, (I - A)|_{X_1}$.

Рассмотрим оператор A на подпространстве X_1 и покажем, что $\exists\, c > 0 : \forall\, x \in X_1\ \|(I - A)x\| \geqslant c\|x\|$. Предположим противное: $\exists\, \{x_n\} \subset X_1 : \|x_n\| = 1$, $(I - A)x_n \to 0\ n \to \infty$.

Т.к. $A \in \mathcal{K}(X)$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\} : Ax_{n_k} \to x$. Так как $(I - A)x_{n_k} \to 0$, то $x_{n_k} \to x$. В силу замкнутости X_1 получаем, что $x \in X_1$, но по непрерывности оператора $I - A$ получаем, что $(I - A)x = 0$, т.е. $x \in X_0$. Следовательно, $x = 0$, но $\|x_{n_k}\| = 1$, откуда получаем, что $\|x\| = 1$. Противоречие. Следовательно такая константа c существует, откуда получаем замкнутость образа оператора $I - A$. □

Лемма 3. *Пусть $A \in \mathcal{K}(X)$ и $T := I - A$. Справедливы равенства* $\mathrm{Im}\, T = (\mathrm{Ker}\, T')^{\perp}$, $\mathrm{Im}\, T' = (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$.
(В общей ситуации $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ справедливо соотношение $\overline{\mathrm{Im}\, T} = (\mathrm{Ker}\, T')^{\perp}$*).*

Доказательство. 1) Если $f \in \mathrm{Ker}\, T'$, то $\forall\, x \in X$ выполнено: $0 = (T'f)(x) = f(Tx) \Rightarrow \mathrm{Im}\, T \subset (\mathrm{Ker}\, T')^{\perp}$.

2) Если $\mathrm{Im}\, T \subsetneq (\mathrm{Ker}\, T')^{\perp}$, то $\exists\, x_0 \in (\mathrm{Ker}\, T')^{\perp} \setminus \mathrm{Im}\, T$ и по т. Хана–Банаха $\exists\, f : f|_{\mathrm{Im}\, T} = 0$, $f(x_0) = 1$. Тогда $\forall\, x \in X\ 0 = f(Tx) = (T'f)(x) \Rightarrow f \in \mathrm{Ker}(T') \Rightarrow f(x_0) = 0$. Противоречие.

Для сопряжённого оператора.

1) Если $x \in \mathrm{Ker}\, T \Rightarrow \forall\, f \in X^*\ (T'f)(x) = f(Tx) = 0$, откуда $\mathrm{Im}\, T' \subset (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$. В силу замкнутости $\mathrm{Im}\, T' \Rightarrow \overline{\mathrm{Im}\, T} \subset (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$.

2) Пусть $g \in (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$. Возьмём $y \in \mathrm{Im}\, T$, $\exists\, x \in X : y = Tx$. Определим функционал f_0 на $\mathrm{Im}\, T$: Если $y \in \mathrm{Im}\, T$, то $\exists\, x \in X : y = Tx$. Тогда

$$f_0(y) := g(x).$$

а) Корректность. Если $y = Tz$, то $T(x - z) = 0 \Rightarrow x - z \in \mathrm{Ker}\, T \Rightarrow g(x - z) = 0$.

б) Ограниченность. По лемме 2 $\|x\| \leqslant \dfrac{1}{c}\|Tx\|$ для любого $x \notin \mathrm{Ker}\, T$. Следовательно, хотя бы для одного прообраза вектора y справедливо неравенство $\|x\| \leqslant \dfrac{1}{c}\|y\|$. Тогда

$$|f_0(y)| = |g(x)| \leqslant \|g\| \|x\| \leqslant \frac{1}{c}\|g\| \|y\|.$$

По теореме Хана–Банаха продолжим f_0 на всё пространство X. Обозначим это продолжение через f.

$$f(Tx) = f(y) = f_0(y) = g(x) \Leftrightarrow (T'f)(x) = g(x) \Leftrightarrow T'f = g \Rightarrow g \in \mathrm{Im}\, T'.$$

□

Лемма 4. *Пусть $A \in \mathcal{K}(X)$ и $T := I - A$. Если* $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$*, то* $\mathrm{Im}\, T = X$.
Аналогично: если $\mathrm{Ker}\, T' = \{0\}$*, то* $\mathrm{Im}\, T' = X$.

Доказательство. Обозначим: $X_n := \mathrm{Im}\, T^n$ $(X_0 = X)$. Оператор T инъективный, поэтому если $\mathrm{Im}\, T \neq X$, то $X \supset X_1 \ldots X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$. По теореме о почти перпендикуляре $\forall\, n\ \exists\, x_n \in X_n : \|x_n\| = 1$, $\rho(x_n, X_{n+1}) > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \|x_n - x_m\| > \dfrac{1}{2}\ \forall\, n < m$. Так как оператор компактный, то из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выбрать сходящуюся в X последовательность. Но:

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|(I - T)x_n - (I - T)x_m\| = \|x_n - \underbrace{(Tx_n + x_m - Tx_m)}_{\in X_{n+1}}\| > \frac{1}{2}.$$

Противоречие. □

Лемма 5. *Пусть $A \in \mathcal{K}(X)$ и $T := I - A$. Если $\operatorname{Im} T = X$, то $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.*

Доказательство. Если $\operatorname{Im} T = X$, то $\operatorname{Ker} T' = \{0\}$ (Лемма 3). Тогда $\operatorname{Im} T' = X^*$ (Лемма 4). □

Пусть $A \in \mathcal{K}(X)$ и $T := I - A$. Рассматриваются уравнения

1) $(I - A)x = y$
2) $(I - A)x = 0$
3) $(I - A')f = g$
4) $(I - A')f = 0$.

Теорема 1 (Первая теорема Фредгольма)**.** *Уравнение 1) (2)) имеет решение только если $y \perp \operatorname{Ker} T'$ ($g \perp \operatorname{Ker} T$).*

Доказательство. Лемма 3. □

Теорема 2 (Вторая теорема Фредгольма (Альтернатива Фредгольма))**.** *Либо уравнение 1) (3)) имеет решение для любой правой части (и оно единственное), либо уравнение 2) (4)) имеет нетривиальное решение.*

Доказательство. Леммы 4, 5. □

Теорема 3 (Третья теорема Фредгольма)**.** *Пусть $A \in \mathcal{K}(X)$ и $T := I - A$. $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T'$*

Доказательство. Пусть $n = \dim \operatorname{Ker} T$ и $m = \dim \operatorname{Ker} T'$. Пусть $n < m$. Выберем $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ — базис в $\operatorname{Ker} T$; $f_1, \ldots, f_n$ — биортогональная к ней система в X^*. Пусть также $g_1, , \ldots g_m$ — базис в $\operatorname{Ker} T'$; $\psi_1, \ldots, \psi_m$ — биортогональная к ней система в X.

Продолжим функционалы f_i, по теореме Хана–Банаха на всё пространство, сохранив те же обозначения для продолженных функционалов. Строим оператор:

$$Sx = Tx - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\psi_i. \tag{1}$$

Этот оператор имеет вид $I - B$, где $B \in \mathcal{K}(X)$, поэтому к нему применима вся развитая теория.

Найдём действие сопряжённого оператора:

$$f(Sx) = f(Tx) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(\psi_i) \Leftrightarrow (S'f)(x) = (T'f)(x) - \sum_{i=1}^{n} f(\psi_i) f_i(x).$$

Т.е.

$$S'f = T'f - \sum_{i=1}^{n} f(\psi_i) f_i.$$

Посмотрим на его ядро: пусть $Sx = 0 \Rightarrow g_j(Sx) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(T'g_j)}_{=0}(x) - \sum_{i=1}^{\alpha} f_i(x) g_j(\psi_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \underbrace{g_j(\psi_i)}_{=\delta_{ij}} = 0$
$\Rightarrow f_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots \alpha \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$.

Применим к этому представлению x функционалы f_i, $i = 1, \ldots n$. Учитывая, то $f_i(x) = 0$, получим

$$0 = \sum_{k=1}^{n} c_k f_i(\varphi_k) = c_i.$$

Следовательно $x = 0$. Поэтому уравнение $Sx = y$ а вместе с ним и уравнение $S'f = g$ имеют решения для любой правой части.

Уравнение

$$Tx - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\psi_i = \gamma_{n+1}$$

имеет решение x_0.

Тогда

$$1 = g_{n+1}(\psi_{n+1}) = g_{n+1}(Tx_0 - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0)\psi_i) = (\underbrace{T'g_{n+1}}_{=0})(x_0) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) \underbrace{g_{n+1}(\psi_i)}_{=0} = 0.$$

Противоречие.

Если предположить, что $n > m$, то надо рассмотреть оператор

$$T'f = S'f - \sum_{i=1}^{m} f(\psi_i) f_i$$

□

Теорема 4. *Пусть* X *— банахово пространство,* $\dim X = \infty$, $A \in \mathcal{K}(X)$. *Тогда*

1) $0 \in \sigma(A)$.

2) Если $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$ *и* $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < \infty$ *(Каждое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность).*

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ *конечное количество собственных значений* $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ *оператора* A*, таких, что* $|\lambda_i| > \varepsilon$ $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Доказательство 3). Предположим противное. Пусть $\exists$ счётный набор различных собственных значений λ_1, λ_2, …таких, что $|\lambda_i| > \varepsilon$. Для каждого собственного значения возьмём по одному собственному вектору e_i: $Ae_i = \lambda_i e_i$, считаем, что $\|e_i\| = 1$. Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ линейно независима.

Строим цепочку расширяющихся пространств $X_n := \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \subsetneq X_{n+1}$. Для каждого $n \geqslant 1$ по лемме о почти перпендикуляре выберем $x_{n+1} \in X_{n+1}$, $\|x_{n+1}\| = 1$ $\rho(x_{n+1}, X_n) \geqslant \frac{1}{2}$.

Каждый такой вектор можно представить в виде

$$x_n = \alpha_n e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k} e_k, \quad n = 2, \ldots$$

Теперь построим вектора $y_k = \frac{x_k}{\lambda_k}$, $\|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{|\lambda_k|} < \frac{1}{\varepsilon}$ Множество $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено, оператор A — компактный, следовательно множество $\{Ay_k\}_{k=1}^{\infty}$ предкомпактно, значит из этой последовательности можно выделить сходящуюся в X подпоследовательность. Но (считаем: $n > m$, т .е. $X_m \subset X_{n-1}$),

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\alpha_n e_n + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{n,k} e_k - \alpha_m e_m - \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_{m,k} e_k\| = \|x_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (\gamma_{n,k} - \beta_{n,k}) e_k - \alpha_m e_m - \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_{m,k} e_k}_{\in X_{n-1}} \| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Противоречие.

$\square$