# 1 Спектральная теорема. Функциональное исчисление

**Теорема 1** (Теорема об отображении спектра)**.** *Пусть* $A \in B(X)$, $X$ *— банахово пространство.* $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. *Тогда* $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{\lambda = p(z) : z \in \sigma(A)\}$.

*Доказательство.* Пусть

$$p(t) - \lambda = a_n(t - z_1) \cdot (t - z_n), \quad \text{тогда} \quad p(A) - \lambda = a_n(A - z_1 I) \cdot \ldots \cdot (A - z_n I).$$

Считаем, что $a_n \neq 0$.

1) Пусть $\lambda \in \sigma(p(A))$. Левая часть последнего равенства необратима. Следовательно, необратима правая часть. Значит существует $i$: $A - z_i I$ необратим, т.е. $z_i \in \sigma(A)$ и $\lambda = p(z_i)$. Доказали $\subset$.

2) Пусть $\lambda \in p(\sigma(A))$, т.е. $\exists\, z \in \sigma(A) : \lambda = p(z)$. В силу разложения $z = z_i$ для какого-то $i$. Оператор $A - z_i I$ необратим. Если $z_i \in \sigma_p(A)$, то ставим $A - z_i I$ на первое место (самое правое в произведении). Так можно сделать так как все операторы $A - z_k I$ перестановочны. Тогда у оператора $p(A) - \lambda I$ есть собственный вектор, т.е. $\lambda \in \sigma(p(A))$. Если же $\sigma_p(A) = \{\varnothing\}$, то образ оператора $A - z_i I$ не совпадает со всем пространством $X$. Ставим тогда оператор $A - z_i I$ на последнее место (самое левое в произведении) и убеждаемся, что и $\mathrm{Im}(p(A) - \lambda I) \neq X$. ☐

**Теорема 2** (Голоморфное исчисление)**.**

**Теорема 3** (Непрерывное исчисление)**.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство* $A = A^* \in B(H)$, $\sigma(A) \in [a; b]$. *Тогда существует единственный гомоморфизм* $\varphi : C[a; b] \to B(H)$ *(на самом деле первичен гомоморфизм* $\varphi : C(\sigma(A)) \to B(H)$*), обладающий свойствами:*

*1)* $\varphi(1) = I$*;*
*2)* $\varphi(x) = A$*;*
*3)* $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$*;* $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$*;*
*4)* $\varphi$ *— линейный непрерывный оператор из* $C(\sigma(A))$ *в* $B(H)$*, т.е. если* $f_n \rightrightarrows f$*, то* $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ *в* $B(H)$*.*
*Этот гомоморфизм также обладает свойствами:*
*5)* $\|\varphi(f)\| = \max\limits_{t \in \sigma(A))} |f(t)|$ *(усиление свойства 4));*
*6)* $\forall\, B$*:* $AB = BA \Rightarrow \varphi(A)B = B\varphi(A)$*;*
*7)* $\varphi(\overline{f}) = (\varphi(f))^*$*.*

*Доказательство.* Свойство 3) — это всего лишь свойство гомоморфизма. Свойства 1) и 2) однозначно определяют $\varphi$ на многочленах: $\varphi(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$.

По теореме Вейерштрасса строим последовательность многочленов $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\|f - p_n\|_{C(\sigma(A))} \to 0$.

Рассмотрим последовательность операторов $\{p_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$. Если все коэффициенты всех многочленов вещественны, то $(p_n(A))^* = p_n(A)^*$ (иначе $(p_n(A))^* = \overline{p_n}(A))$). Рассмотрим сначала первый случай (последовательность многочленов с действительными коэффициентами). На основе теоремы 1 получаем:

$$\|p_n(A) - p_m(A)\| = \|(p_n - p_m)(A)\| = \max_{\lambda \in \sigma((p_n - p_m)(A))} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \|p_n(\lambda) - p_m(\lambda)\| \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

Следовательно последовательность $\{p_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $B(H)$. Определим

$$f(A) := \lim_{n \to \infty} p_n(A).$$

Если взять другую последовательность многочленов $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\|f - q_n\|_{C(\sigma(A))} \to 0$, то рассмотрев последовательность $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, \ldots$, получим что и последовательность $p_1(A), q_1(A), \ldots, p_n(A), q_n(A), \ldots$ фундаментальна в $B(H)$, т.е. $f(A)$ не зависит от выбора последовательности многочленов.

Второй случай (последовательность многочленов с невещественными коэффициентами).

$\|p_n(A)\|^2 = \|(p_n(A))^* \cdot p_n(A)\| = \|\overline{p_n} p_n(A)\| = \||p_n|^2(A)\|^2$. Все многочлены $|p_n|^2$ имеют действительные коэффициенты и мы свели задачу к случаю 1). Последовательность $\{p_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $B(H)$.

В итого определили $\varphi$ на произвольной функции $f \in C(\sigma(A))$ и доказали свойство 4).

Свойство 5) $\|\varphi(f)\| = \|f(A\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|p_n(A)\| = \lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{t \in \sigma(A))} |p_n(t)| = \|f\|_{C(\sigma(A))}$

Свойства 6) и 7) также следуют из предельных переходов и очевидного выполнения этих свойств для многочленов. ☐

**Теорема 4** (Борелевское исчисление)**.** *Пусть* $H$ *— гильбертово пространство* $A = A^* \in B(H)$, $\sigma(A) \in [a; b]$. $\mathcal{B}[a; b]$ *— пространство* ***ограниченных*** *борелевских функций (норма:* $\|f\|_{\mathcal{B}[a;b]} = \sup_{[a;b]} |f(t)|$*). Тогда существует единственный гомоморфизм* $\varphi : \mathcal{B}[a; b] \to B(H)$ *(на самом деле первичен гомоморфизм* $\varphi : \mathcal{B}(\sigma(A)) \to B(H)$*), обладающий свойствами:*

*1)* $\varphi(1) = I$*;*
*2)* $\varphi(x) = A$*;*
*3)* $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$*;* $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$*;*

*4) Если $\|f_n\|_{\mathcal{B}(\sigma(A))} \leqslant C$ и $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке $x \in \sigma(A)$, то $\varphi(f_n) \xrightarrow{s} \varphi(f)$ в $B(H)$.*
*Этот гомоморфизм также обладает свойствами:*
*5) $\|\varphi(f)\|_{\mathcal{B}(\sigma(A))} = \max\limits_{t\in\sigma(A)} |f(t)|$ (усиление свойства 4));*
*6) $\forall B$: $AB = BA \Rightarrow \varphi(A)B = B\varphi(A)$;*
*7) $\varphi(\overline{f}) = (\varphi(f))^*$.*

*Доказательство.* Зафиксируем $x; y \in H$ и построим отображение

$$C[a;b;] \to \mathbb{C} \quad f \mapsto (f(A)x, y); \quad |(f(A)x, y)| \leqslant \|f\|_{C[a;b]}\|x\|\|y\|.$$

Получили линейный непрерывный функционал на $C[a;b]$. Следовательно, $\exists\, g \in BV_0[a;b]$

$$(f(A)x, y) = \int_a^b f(t)\, dg(t).$$

Функция $g$ зависит от выбранных элементов $x$ и $y$: $g = g_{x,y}$.

**Замечание 1.** *Функция ограниченной вариации $g$ порождает комплекснозначную меру $\mu_g$: $\mu_g([\alpha;\beta)) = g(\beta) - g(\alpha)$, которая есть линейная комбинация четырех неотрицательных мер. Так как*

$$(x, y) = \frac{1}{4}\big((x + y, x + y) - (x - y, x - y) + i(((x + iy, x + iy) - (x - iy, x - iy))\big),$$

*то*

$$\mu_{g_{x,y}} = \frac{1}{4}((\mu_{g_{x+y}} - \mu_{g_{x-y}}) + i(\mu_{g_{x+iy}} - \mu_{g_{x-iy}})).$$

Здесь $g_v := g_{v,v}$.

Пусть теперь $f \in \mathcal{B}[a;b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(t)\, dg(t)$ — полуторалинейная форма от $x$ и $y$ (линейная по $x$ и полуторалинейная по $y$) и

$$\left|\int_a^b f(t)\, dg(t)\right| \leqslant \|f\|_{\mathcal{B}[a;b]}|dg| \leqslant \|f\|_{\mathcal{B}[a;b]}\|x\|\|y\|.$$

Заметим, что справедливо неравенство $\mathrm{Var}_a^b\, g \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Для проверки этого факта строим последовательность функций $f_n$, $|f(x)| \leqslant 1$, $f_n(t) \to \operatorname{sgn} g(t)$: $\left|\int_a^b f(t)\, dg(t)\right| \to \int_a^b |dg| = \mathrm{Var}_a^b\, g$.

Следовательно, существует ограниченный оператор $B$ ($\|B\| \leqslant \|f\|_{\mathcal{B}[a;b]}$) такой, что

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = (Bx, y).$$

**Существование оператора $B$:** форма $\overline{\int_a^b f(t)\, dg(t)}$ — линейный по $y$ ограниченный функционал. Следовательно, существует $z \in H$: $\overline{\int_a^b f(t)\, dg(t)} = (y, z) = \overline{(z, y)} =: \overline{(Bx, y)}$, $z$ линейно зависит от $x$. Положим $z = B$.

Определим

$$f(A) := B.$$

**Сходимость** Если $f_n \in \mathcal{B}[a;b]$, $\|f_n\|_{\mathcal{B}} \leqslant C$, $f_n(x) \to f(x) \in \mathcal{B}[a;b]$, то по теореме Лебега

$$\int_a^b f_n(t)\, dg(t) \to \int_a^b f(t)\, dg(t),$$

следовательно $f_n(A) \rightharpoonup f(A)$. Из слабой сходимости в силу самосопряженности оператора $A$ следует сильная сходимость:

$$|f_n - f|^2(A) \rightharpoonup 0 \Leftrightarrow ((f_n - f)(A))^*(f_n - f)(A)) \rightharpoonup 0 \Rightarrow ((f_n - f)(A))^*(f_n - f)(A)x, x) \to 0 \Leftrightarrow \|(f_n - f)(A)x\|^2 \to 0.$$

□

## 2 Спектральная теорема. Спектральная функция. Интегральное представление $f(A)$.

**Проекторнозначные меры** Пусть $\mathcal{B}$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств на отрезке $[a;b]$, где $\sigma(A) \subset [a;b]$. Отображение $E : \mathcal{B} \to B(H)$ со свойствами ($\Omega \in \mathcal{B}$):
1) $E_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2} = E_{\Omega_1} + E_{\Omega_2}$;
2) $E_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = E_{\Omega_1} \cdot E_{\Omega_2}$;

3) $(E_\Omega)^* = E_\Omega$;

4) $\Omega_n \to \Omega$ (т.е. $\chi_{\Omega_n}(t) \to \chi_\Omega(t)$ в каждой точке $t$) $\Rightarrow E_{\Omega_n} \xrightarrow{s} E_\Omega$

называют проекторнозначной мерой.

Свойство 1) $\Rightarrow$ аддитивность.

Свойство 2) $\Rightarrow E_\Omega = (E_\Omega)^2$. Вместе со свойством 3) получаем, что $E$ — ортогональный проектор.

Обозначения: $E_\lambda = E_{(-\infty;\lambda)}$, $E_{[\alpha;\beta)} = E_\beta - E_\alpha$,

По $E_\lambda$ можно строить интегралы; $T := \{t_k\}_{k=0}^n$, $\Xi := \{\xi_k\}_{k=1}^n$, $\xi_k \in [t_{k-1}; t_k]$.

а) Римана $S(T, \Xi, f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) E_{[t_{k-1}, t_k)} \to \int_a^b f(t) dE_t$. Интеграл заведомо существует для $f \in C[a;b]$

б) Лебега $S_n(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{k}{2^n} E_{\left\{t:\, \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(t) < \frac{k}{2^n}\right\}} \to \int_{[a;b]} f(t) dE_t$. Интеграл заведомо существует для $f \in \mathcal{B}[a;b]$.

Сходимость интегральных сумм — равномерная.

**Теорема 5** (Интегральное представление)**.** *$A = A^* \in B(H)$, $f \in \mathcal{B}[a;b]$ $(\sigma(A) \subset [a;b]$. Тогда $f(A) = \int_a^b f(t)\, dE_t$.*

*Доказательство.* Положим
$$E_\Omega := \chi_\Omega(A).$$
Проверим, будет ли $E_\Omega$ проекторнозначной мерой.

Свойство 1) следует из свойств гомоморфизма. Так как $\chi^2(t) = \chi(t)$ и $\chi$ — действительная функция, то $E_\Omega$ — ортопроектор (это свойства 2) и 3)). Свойство 4) следует из теоремы о функциональном исчислении.

Представление функции от оператора.

1) Для характеристической функции борелевского множества $\Omega$ представление
$$\chi_\Omega(A) = \int_a^b \chi_\Omega(t)\, dE_t$$
следует из определения интеграла и определения семейства $E_t$.

2) Из пункта 1) получаем представление $f(A)$ для простых функций $f$.

3) Для произвольной ограниченной борелевской функции представление получается предельным переходом и применением теоремы Лебега о предельном переходе: $f_n(t) \to f(t)$. □

**Явное вычисление $E_\lambda$ для конкретных операторов**

1) $H = \mathbb{C}^n$, $A = A^*$.

Так как $A = A^*$, то существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет вид $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Действие оператора в этом базисе задается формулой
$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{(x, e_k) e_k}_{\text{проектор на собственное подпространство}} = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k = \int_{\sigma(A)} \lambda\, dE_\lambda,$$
откуда получаем, что при достаточно малом $\varepsilon$ (такие, что окрестности собственных значений не пересекаются) $E_{[\lambda_k-\varepsilon;\lambda_k+\varepsilon)} x = (x, e_k) e_k$ (при условии однократности сз; — иначе просуммировать по всем собственным векторам для этого сз).

2) $H = L_2[a;b]$, $(Af)(x) = \varphi(x) f(x)$, $\varphi$ — действительнозначная непрерывная строго монотонная функция (пусть $\varphi \upuparrows$).

Так как $\sigma(A) = [\varphi(a); \varphi(b)]$, то $E_\lambda$ надо определить при $\lambda \in [\varphi(a); \varphi(b)]$.

Пусть $\lambda :\ \varphi(a) < \lambda < \varphi(b)$. Из определения функции $\chi_{[\varphi(a);\lambda)}(t)$ следует, что
$$\chi_{[\varphi(a);\lambda)}(A) = \begin{cases} I, & \text{если } t < \lambda \\ O, & \text{если } t \geqslant \lambda, \end{cases}$$
т.е. это проектор, действие которого после замены переменных $x = \varphi^{-1}(t)$, задаётся формулой
$\chi_{[\varphi(a);\lambda)}(A) f(x) = \chi_{[a;\varphi^{-1}(\lambda))}(x) f(x)$.

# 3 Спектральная теорема. Унитарная эквивалентность самосопряженного оператора оператору умножения на функцию

**Определение.** Циклический вектор. Вектор $x$ называется циклическим для оператора $A$, если $\langle x, Ax, A^2x, \ldots\rangle^\perp = 0$.

Оператор с циклическим вектором называют еще *оператором с простым спектром.*

**Теорема 6.** *$H$ — сепарабельное гильбертово пространство, $A = A^* \in B(H)$ — оператор с циклическим вектором. $\sigma(A) \in [a;b]$. Тогда существует мера $\mu$ и $U : H \to L_2([a;b], \mu)$ — унитарный изоморфизм пространств, что $UA = MU$, где $Mf(t) = tf(t)$.*

*Доказательство.* Пусть $h$ — циклический вектор. Определим меру $\mu$: $\mu([\alpha;\beta)) = (E_{[\alpha;\beta)}h, h)$

Строим изоморфизм: $U : h \mapsto 1$, $U : Ah \mapsto t$, $\ldots U : A^n h \mapsto t^n$.

В силу цикличности вектора $h$ вектора $\sum_{k=0}^n A^k h$ всюду плотны в $H$, многочлены $U(\sum_{k=0}^n A^k h) = \sum_{k=0}^n t^k$ всюду плотны в $L_2([a;b];\mu)$.

Изометричность $U$

$$(UA^k h, UA^n h)_{L_2} = \int_{[a;b]} t^{k+n}\, d\mu$$

$$(A^k h, A^n h)_H = (A^{k+n}h, h)_H = \int_{\sigma(A)} \lambda^{k+n}\,(dE_\lambda h, h) = \int_{[a;b]} \lambda^{k+n}\, d\mu.$$

Далее продолжаем $U$ как изометричный оператор со всего $H$ на все $L_2([a;b],\mu)$ (т.е. унитарный оператор). □

**Теорема 7.** *$H$ — сепарабельное гильбертово пространство, $A = A^* \in B(H)$ — оператор без циклического вектора. $\sigma(A) \subset [a;b]$. Тогда существует разложения пространства в прямую сумму подпространств $H = \oplus_{n=1}^N H_n$ $(N \leqslant \infty)$, в каждом из которых у оператора $A|_{H_n}$ есть циклический вектор, существуют меры $\mu_n$ $(n \leqslant N)$ и $U : \oplus_{n=1}^N H_n \to \oplus_{n=1}^N L_2([a;b],\mu_n)$ — унитарный изоморфизм пространств, что $UA|_{H_n} = M_n U$, где $M_n f(t) = tf(t)$ в $L_2([a;b],\mu_n)$.*

*Доказательство.* Рассмотрим семейство $\mathcal{S}$, состоящее из сумм попарно ортогональных инвариантных для $A$ замкнутых подпространств $E \in H$ $(AE \subset E)$, таких что в каждом из слагаемых $A$ имеет циклический вектор.

Это семейство частично упорядочено по включению. Каждая возрастающая последовательность из $S$ ограничена сверху (объединением элементов последовательности), следовательно в $\mathcal{S}$ есть максимальный элемент, который имеет вид $\oplus_{n=1}^N H_n$ ($N \in \mathbb{N}$ или $N = \infty$ — счетное множество, $H_n$ — взаимно ортогональные инвариантные подпространства, в каждом из которых есть циклический вектор). При этом $H = \oplus_{n=1}^N H_n$.

Действительно, если бы существовал вектор $x \neq 0$, $x \perp H_n$ $\forall n$, то $\overline{\langle x, Ax, \ldots, A^k x, \ldots\rangle}$ было бы ортогонально $\oplus_{n=1}^N H_n$ (если подпространство инвариантно для $A = A^*$, то его ортогональное дополнение тоже инвариантно для $A$), инвариантно для $A$ и $x$ в нем циклический. Это противоречит существованию максимального элемента в $\mathcal{S}$. По теореме 1 в каждом пространстве $H_n$ оператор $A$ подобен оператору умножения на независимую переменную в $L_2([a;b],\mu_n)$.

□

**Теорема 8** (Следствие теоремы 2)**.** *$H$ — сепарабельное гильбертово пространство, $A = A^* \in B(H)$ — оператор без циклического вектора. $\sigma(A) \subset [a;b]$. Тогда существуют такие мера $\mu$, унитарный изоморфизм $U : H \to L_2(\mathbb{R},\mu)$ и вещественная функция $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R})$, что $UA = UA_\varphi$, где оператор $A_\varphi$ есть оператор умножения на функцию $\varphi$ в $L_2(\mathbb{R})$. Другими словами, оператор $A$ подобен оператору умножения на функцию.*

*Доказательство.* Для определенности возьмем в качестве $[a;b]$ отрезок $[-\|A\|;\|A\|]$.

Определим проекторы $P_n : H \to H_n$. Тогда для любого вектора $x \in H$ справедливо представление $x = \sum P_n x$. Иначе $y := x - \sum P_n x \perp \oplus_{n=1}^N H_n$ и $y \notin \overline{\langle \oplus_{n=1}^N H_n\rangle}$.

В каждом $H_n$ у $A|_{H_n}$ есть циклический вектор. Найдем борелевскую меру $\mu_n$ на $\sigma(A) \subset [a;b] =: \Delta_0$ такую, что $A|_{H_n}$ унитарно эквивалентен оператора умножения на $t$ в $L_2([a;b],\mu_n)$.

Перенесем $\mu_n$ на $\Delta_n = \Delta_0 + 3n\|A\| = [(3n-1)\|A\|;(3n+1)\|A\|]$, обозначим полученную меру $\nu_n$. Оператор $A|_{H_n}$ унитарно эквивалентен оператору умножения на $t - 3n\|A\|$ в $L_2(\Delta_n,\nu_n)$.

Определим $\mu := \sum_{n=1}^N 2^{-n}\nu_n$, $\varphi(t) := t - 3n\|A\|$ при $t \in \sigma(A) + 3n\|A\|$. Пусть $U_n$ — унитарный оператор $H_n \to L_2(\Delta_n,\nu_n)$, такой что $U_n A|_{H_n} = (t - 3n\|A\|)U_n$. Вне компактов $\sigma(A) + 3n\|A\|$ доопределим $\varphi$ каким-либо значением из $\sigma(A)$.

Зададим в $L_2(\mathbb{R},\mu)$ оператор $A_\varphi$ умножения на $\varphi$.

Осталось задать унитарный оператор $U : H \to L_2(\mathbb{R},\mu)$. Для произвольного вектора $x$ обозначим $x_n$ его проекцию на $H_n$.

Определим

$$Ux := U\sum_{n=1} x_n = \sum_{n=1} 2^{n/2}U_n x_n$$

Ряд сходится, ибо носители функций $2^{n/2}U_n x_n$ лежат в $\Delta_n$, которые не пересекаются, а функция интегрируется по мере $2^{-n}\nu_n$. Проверим:

$$\|Ux\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^N 2^{-n}2^n\|U_n x_n\|^2_{L_2(\Delta_n,\nu_n)} = \sum_{n=1}^N \|x_n\|^2_{H_n} = \|x\|^2 \quad \text{— унитарность.}$$

$$A_\varphi Ux = \sum_{n=1}^N \varphi 2^{n/2}U_n x_n = \sum_{n=1}^N 2^{n/2}U_n A x_n = UAx$$

□

**Теорема 9** (Без доказательства)**.** *Для любого самосопряженного оператора $A \in B(H)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ существует такая борелевская мера $\mu$ и такая конечная или счетная упорядоченная по вложенности последовательность множеств $\sigma_k$, $\sigma_1 = \sigma(A)$, что оператор $A$ унитарно эквивалентен ортогональной сумме операторов умножения на $t$ в пространствах $L_2(\sigma_k, \mu)$.*

## Полная система унитарных инвариантов самосопряженного оператора $A$

**Определение.** Эквивалентность мер. $\mu_1 \sim \mu_2$, если запас множеств меры нуль по каждой мере один и тот же.

Инварианты:

1. Тип меры: $\mu_1 \sim \mu_2$.

2. Функция кратности $n_A$: $\sigma_1 := \sigma(A)$, $\sigma_j \subset \sigma(A)$ $j = 1, 2, \ldots$ — последовательность невозрастающих множеств $\sigma_j \supset \sigma_{j+1}$. Определим $n_A(t) = 0$ вне $\sigma(A)$; $n_A(t) = j$ при $t \in \sigma_j \setminus \sigma_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$

**Пример.** $(Af)(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x$ в $L_2[-1;1]$. $\sigma_1 = \sigma(A) = \left[-\frac{1}{48}; 1\right]$; $\sigma_2 = \left[-\frac{1}{48}; \frac{1}{2}\right)$. $n_A(t) = 2$ при $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$; $n_A(t) = 1$ при $t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.