Обобщённые функции. Преобразование Фурье.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_1[a,b]$ и $\forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ выполнено $\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = 0$. Тогда $f = 0$ почти всюду на $[a,b]$.*

Доказательство. Строим $\varphi_{c+\varepsilon,d-\varepsilon,\varepsilon}$, где $[c,d] \subseteq [a,b]$. Тогда $\varphi_{c+\varepsilon,d-\varepsilon,\varepsilon} \to \chi_{[c,d]}$ почти всюду и $|f \cdot \varphi_{c+\varepsilon,d-\varepsilon,\varepsilon}| \leqslant |f|$. По теореме Лебега получаем, что

$$\int_c^d f = \int_c^d f \cdot \chi_{[c,d]} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b f(t)\varphi_{c+\varepsilon,d-\varepsilon,\varepsilon}(t)\,dt = 0.$$

В частности, $\int_a^x f(t)\,dt = 0\ \forall x \in [a,b]$. Дифференцируя, получаем $f(x) = 0$. □

Определение. Линейное подпространство $M \subset D'$ *достаточное*, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \varphi \neq 0 \quad \exists f \in M : \langle f, \varphi\rangle \neq 0$.

Замечание. Аналогично, понятие достаточного подпространства M вводится на любой паре (X, X'), где X' — двойственное пространство (пространство всех линейных функционалов) к X.

Лемма 1. *Пусть M — достаточное подпространство. Тогда для любой линейно независимой системы $x_1, \ldots, x_n$ в X и любого набора $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ существует $f \in M : f(x_i) = \lambda_i$, $i = 1, \ldots n$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $A : M \to \mathbb{C}^n : f \to (f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Если $A(M) \neq \mathbb{C}^n$, то $\exists g \in (\mathbb{C}^n)' : g|_{A(M)} = 0$ и $g \neq 0$.

Пусть $e_1, \ldots e_n$ — базис в $\mathbb{C}^n$. Пусть $x := \sum_{k=1}^n g(e_k)x_k$. Для $f \in M$ получаем

$$f(x) = f(\sum_{k=1}^n g(e_k)x_k) = \sum_{k=1}^n g(e_k)f(x_k) = g(\sum_{k=1}^n e_k f(x_k) = g((f(x_1), \ldots, f(x_n)) = 0.$$

Так как $g \neq 0$, то хотя бы одно из чисел $g(e_k) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Противоречие с достаточностью. □

Теорема 2. *Пусть X — полинормированное пространство, $M \in X^*$ — достаточное подпространство. Тогда M плотно в X^* относительно $*$-слабой топологии.*

Доказательство. Пусть $g \in X^*$ и $U_{g,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon}$ — окрестность функционала g в $*$-слабой топологии.

$$U_{g,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon} = \{f \in X^* : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon\}.$$

В частности в $U_{g,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon}$ лежат все такие функционалы f, для которых $f(x_k) = g(x_k)$.

Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то подходит любой функционал: $|f(x_k) - g(x_k)| = 0 < \varepsilon$. Считаем, что $x_1, \ldots x_m$ $(m \leqslant n)$ максимальная линейно независимая подсистема.

$\forall x_k$, $k = 1, \ldots, n$ имеем $x_k = \sum_{i=1}^m c_{k,i}x_i$. Тогда по лемме 1 $\exists f \in M : f(x_i) = g(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Для этого функционала f получаем:

$$f(x_k) = \sum_{i=1}^m c_{k,i}f(x_i) = \sum_{i=1}^m c_{k,i}g(x_i) = g(x_k).$$

□

Следствие. 1. *Пространство $\mathcal{D}$ достаточное.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi \neq 0$. Рассмотрим $f_{\overline{\varphi}}$. Очевидно

$$\langle f_{\overline{\varphi}}, \varphi\rangle = \int |\varphi|^2\,dx > 0.$$

□

1 Общая идея введения операций на обобщенных функциях

Пусть $A : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ — непрерывный оператор. Поскольку $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'$ (в $*$-слабой топологии), то основная идея заключается в том, чтобы продолжить этот оператор до непрерывного оператора $\tilde{A} : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ (в дальнейшем, когда такое продолжение возможно будем оператор обозначать тем же символом A), для которого выполнено соотношение $(\tilde{A}f)(\varphi) = f(A\varphi)$, $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

1) Производная.

Из формулы интегрирования по частям для регулярной обобщенной функции f, порожденной функцией из $\mathcal{D}$ получаем

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle.$$

2) Умножение на гладкую функцию.

Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $A\varphi = a(x)\varphi(a)$. Основываясь на действии регулярной функции, получаем, что

$$\langle af, \varphi\rangle = \langle f, a\varphi\rangle.$$

3) Замена переменных.

Пусть $y = y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ гладкая (класса C^∞) биективная функция. Из правила замены переменных в интеграле для регулярных функций получаем

$$\langle f(y(x)), \varphi(x)\rangle = \langle f(y), x'(y)\varphi(x(y))\rangle,$$

где $x = x(y)$ обратная функция.

2 Существование первообразной

1. Сначала решим уравнение

$$f' = 0$$

в $\mathcal{D}'$.

$$\langle f', \varphi\rangle = 0 \Leftrightarrow -\langle f, \varphi'\rangle = 0$$

Следовательно, функционал f зануляется на подпространстве $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$

$$\mathcal{D}_0 = \{\psi \in \mathcal{D} :\ \exists\, \varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \psi = \varphi'\} \Leftrightarrow \{\psi \in \mathcal{D} :\ \int_{\mathbb{R}} \psi\, dx = 0\}.$$

Осталось продолжить функционал на все $\mathcal{D}$ и описать все такие продолжения.

Возьмем функцию $\varphi_1 \in \mathcal{D}$, такую что $\int_{\mathbb{R}} \varphi_1\, dx = 1$. Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ рассмотрим функцию

$$\varphi_0 := \varphi - \varphi_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx.$$

Очевидно, $\varphi_0 \in \mathcal{D}_0$. Тогда

$$\langle f, \varphi\rangle = \underbrace{\langle f, \varphi_0\rangle}_{=0} + \langle f, \varphi_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx\, \underbrace{\langle f, \varphi_1\rangle}_{=c} = \langle c, \varphi\rangle.$$

2. Теперь для произвольной $g \in \mathcal{D}'$ решим уравнение

$$f' = g.$$

$$\langle f', \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle \Leftrightarrow -\langle f, \varphi'\rangle = \langle g, \varphi\rangle.$$

Если положить $\psi = -\varphi'$ ($\psi \in \mathcal{D}_0$), то

$$\langle f, \psi\rangle = \langle g, -\int_{-\infty}^{x} \psi(t)\, dt\rangle.$$

Таким образом, f определен на $\mathcal{D}_0$.

Аналогично, рассмотрим $\varphi_1 \in \mathcal{D}$, такую что $\int_{\mathbb{R}} \varphi_1\, dx = 1$ и представим φ в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx.$$

Заметим, что если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$, то и их проекции на $\mathcal{D}_0$ $\varphi_{n0} \to 0$, поскольку

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n\, dx = \langle 1, \varphi_n\rangle \to 0,$$

а тогда и $\varphi_{n0} = \varphi_n - \varphi_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi_n\, dx \to 0$.

Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ определим

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle g, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)\, dt\rangle.$$

Если есть другая функция $h \in \mathcal{D}'$: $h' = g$, то $(f - h)' = 0 \Rightarrow f - h = const$.

3 Структура обобщенных функций

Лемма 2. *$\forall f \in \mathcal{D}'\ \exists n = n(f,a,b),\ \exists C = C(f,a,b) : \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ справедливо неравенство*

$$\langle f, \varphi \rangle \leqslant C \|\varphi\|_{C^n[a,b]}.$$

Доказательство. Пусть это не так: $\exists f$, для которой требуемого числа n не существует: $\Rightarrow$

$$\forall N \in \mathbb{N}\, \exists \varphi_N \in \mathcal{D}(a,b) : \langle f, \varphi_N \rangle \geqslant N \|\varphi\|_{C^N[a,b]}.$$

Тогда

$$\left\langle f, \frac{\varphi_N}{N\|\varphi\|_{C^N[a,b]}} \right\rangle \geqslant 1,$$

в то время как $\dfrac{\varphi_N}{N\|\varphi\|_{C^N[a,b]}} \to 0$ в $\mathcal{D}$. Противоречие. □

Теорема 3. *$\forall f \in \mathcal{D}'$ и $\forall (a;b)\ \exists m \in \mathbb{N}_0$ и функции $f_0,\ f_1, \ldots,\ f_m \in L_2[a;b]$, что $\forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$*

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{m} \langle f_j, \varphi^{(j)} \rangle.$$

Напомним, что

$$\|\varphi\|_{C^n[a,b]} = \sum_{j=0}^{n} \max_{[x\in[a,b]} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

$$|\varphi^{(j)}(x)| = \left| \int_a^x \varphi^{(j+1)}(t)\, dt \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |\varphi^{(j+1)}(t)|^2\, dt} \sqrt{\int_a^b 1\, dt} = C \sqrt{\int_a^b |\varphi^{(j+1)}(t)|^2\, dt} \Rightarrow$$

$$\max_{x\in[a,b]} |\varphi^{(j)}(x)| \leqslant C \sqrt{\int_a^b |\varphi^{(j+1)}(t)|^2\, dt}$$

В итоге получили

$$\langle f, \varphi \rangle \leqslant C \|\varphi\|_{C^n[a,b]} \leqslant C_1 \sqrt{\sum_{j=0}^{n+1} \int_a^b |\varphi^{(j)}(t)|^2\, dt}. \tag{1}$$

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_m$: пополнение $\mathcal{D}(a,b)$ по норме, порожденным скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_m := \sum_{j=0}^{m} \int_a^b \varphi^{(j)}(x) \overline{\psi^{(j)}(x)}\, dx$$

Неравенство (1) показывает, что функционал f ограничен в $\mathcal{H}_m$ на функциях из $\mathcal{D}(a,b)$.

Так как $\mathcal{D}(a,b)$ плотно в $\mathcal{H}_m$ (по построению), то его можно продолжить как ограниченный функционал на все $\mathcal{H}_m$.

Если последовательность $\{\varphi\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathcal{H}_m$, т.е.

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b |\varphi_n^{(j)}(x) - \varphi_m^{(j)}(x)|^2\, dx \to 0,$$

то получаем, что в $L_2[a;b]$ фундаментальна каждая последовательность производных $\{\varphi^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Следовательно, $\forall j = 0, 1, \ldots, m\ \exists\ \varphi^{[j]} := \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k^{(j)}$ (предел в $L_2[a;b]$). Таким образом, каждому элементу пространства $\mathcal{H}_m$ отвечает набор из $m+1$ функции $\{\varphi^{[j]}\}_{j=0}^{m}$.

При этом

$$(\{\varphi^{[j]}\}, \{\psi^{[j]}\})_m = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b \varphi^{[j]}(x) \overline{\psi^{[j]}(x)}\, dx.$$

Функционалу f отвечает набор $\{f^{[j]}\}_{j=0}^{m}$, $f^{[j]} \in L_2[a,b]$, $j = 0, \ldots, m$ и

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b \varphi^{[j]}(x) \overline{f^{[j]}(x)}\, dx.$$

Если $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$, то

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b \varphi^{(j)}(x) \overline{f^{[j]}(x)}\, dx = \sum_{j=0}^{m} \langle f_j, \varphi^{(j)} \rangle, \quad \text{где} \quad f_j = \overline{f^{[j]}} \in L_2[a;b].$$

Теорема 4 (Разбиение единицы)**.** *Пусть $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ — локально конечное покрытие прямой* ***открытыми ограниченными областями****. (Локально конечное: $\forall\, x\ \exists$ окрестность U_x, которая покрывается конечным числом областей U_k). Тогда существует такая система функций $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, что выполнены условия*

$$\begin{aligned}
&\text{а) } 0 \leqslant e_k(x) \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \dots\\
&\text{б) } e_k(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin U_k\\
&\text{в) } \sum_{k=1}^{\infty} e_k(x) \equiv 1
\end{aligned}$$

Совокупность функций $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *разложением (или разбиением) единицы*, соответствующем покрытию $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. 1) $\mathbb{R} \setminus \cup_{k=2}^{\infty} U_k =: F_1$ — замкнутое множество. $F_1 \subset U_1$.

2) Выберем открытое множество V_1: $F_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$.

3) Если уже построили множества $V_1, V_2, \dots, V_m$ ($\overline{V_k} \subset U_k$). Тогда $\mathbb{R} \setminus (\cup_{k=1}^{m} V_k) \cup (\cup_{k=m+2}^{\infty} U_k) =: F_{m+1}$ — замкнутое множество. Выберем открытое множество V_{m+1}: $F_{m+1} \subset V_{m+1} \subset \overline{V_{m+1}} \subset U_{m+1}$ и т.д.

Так как множество V_m ограничено, то существует $h_m \in \mathcal{D}$, $0 \leqslant h_m(x) \leqslant 1$, $h_m|_{V_m} = 1$, $h(x) = 0$, $x \notin U_m$. Положим

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$$

(ряд сходится в каждой точке x в силу локальной конечности покрытия).

Заведомо $\forall\, x\ h(x) \geqslant 1$ и $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Осталось положить

$$e_k(x) := \frac{h_k(x)}{h(x)}.$$

□

Пример. $U_n = (n; n+2)$, $n \in \mathbb{Z}$, $F_n = \{n+1\}$. В качестве V_n возьмем $V_n = (n+\varepsilon; n+2-\varepsilon)$ с достаточно маленьким фиксированным $\varepsilon > 0$. Тогда $h_n = \varphi_{n+\varepsilon, n+2-\varepsilon, \varepsilon}$.

Теорема 5. *$f \in \mathcal{D}'$. Тогда $\exists \{g_l\}_{l=0}^{\infty}$:*

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \langle g_l^{(l)}, \varphi \rangle,$$

где $g_l \in L_2(\Omega_l)$, Ω_l — ограниченная для каждого l область.

Ряд бесконечный, но для каждой конечной области есть лишь конечное ненулевое количество слагаемых.

Доказательство. Рассмотрим разложение единицы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, соответствующее локально конечному покрытию $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \cdot e_k.$$

Следовательно

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=1} \langle f, \varphi \cdot e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m_k} \langle f_{kj}, (\varphi \cdot e_k)^{(j)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m_k} \langle f_{kj}, \sum_{l=0}^{j} C_j^l e_k^{(j-l)} \varphi^{(l)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m_k} \langle \sum_{l=0}^{j} C_j^l e_k^{(j-l)} f_{kj}, \varphi^{(l)} \rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m_k} \langle \sum_{l=0}^{j} (-1)^l (C_j^l e_k^{(j-l)} f_{kj})^{(l)}, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{m_k} \langle g_{kl}^{(l)}, \varphi \rangle, \quad (2)$$

где

$$g_{kl} = \sum_{j=l}^{m_k} (-1)^l (C_j^l e_k^{(j-l)} f_{kj}) \quad g_{kl} \in L_2(U_k).$$

есть обычная функция с носителем внутри U_k (У индекса l формально поменялся верхний предел суммирования, на самом деле $l \leqslant j \leqslant m_k$).

Носители функций g_{kl} удаляются от начала координат с ростом k. В силу конечности покрытия для каждого x лишь конечное количество слагаемых в сумме

$$g_l(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_{kl}(x)$$

отлично от нуля (при фиксированном l сумма берется лишь по тем k, для которых $l \leqslant m_k$).

Поменяв порядок суммирования в (2) приводим эту формулу к виду

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \langle g_l^{(l)}, \varphi\rangle.$$

Ряд бесконечный, но для каждой конечной области есть лишь конечное ненулевое количество слагаемых (каждая конечная область покрывается конечным количеством областей U_k; сумма идет по $l \leqslant \max_k m_k$).

Положим $\Omega_l = \cup_{k: l\leqslant m_k} U_k$ □

Носитель обобщенной функции

Определение. Будем говорить, что обобщенная функция f равно нулю в точке x, если $\exists\, U_x$ — окрестность, что $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp}\varphi \in U_x \Rightarrow \langle f, \varphi\rangle = 0$. Определим

$$\operatorname{supp} f := \mathbb{R} \setminus \cup_{x: f=0} U_x.$$

Из определения следует, что множество точек, в которых обобщенная функция f равна нулю открыто, а носитель замкнут.

Теорема 6 (О носителе)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$ *и* $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\varphi = \varnothing$. *Тогда* $\langle f, \varphi\rangle = 0$.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{supp}\varphi \Rightarrow x \notin \operatorname{supp} f \Rightarrow \exists\, U_x\ f|_{U_x} = 0$. Выберем V_x так, что $V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$. $\{V_x\}$ — покрытие $\operatorname{supp}\varphi$. Существует конечное подпокрытие $\{V_{x_k}\}_{k=1^n}$. Строим ψ_k таким образом, что $\psi_k|_{V_{x_k}} > 0$, $\operatorname{supp}\psi_k \subset U_k$. Определим $V := \cup_{k=1}^{\infty} V_{x_k}$.

Теперь строим $\varphi_k := \dfrac{\psi_k}{\psi_1 + \ldots + \psi_n}$. Свойства $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$:

1) $\varphi_k \in \mathcal{D}(U_k)$.

2) $\sum_{k=1}^n \varphi_k = 1$ на V.

Тогда $\langle f, \varphi\rangle = \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi\cdot\varphi_k\rangle = 0$, т.к. $\operatorname{supp}\varphi\cdot\varphi_k \subset \overline{V_{x_k}} \subset U_{x_k}$. □

Теорема 7 (Об обобщенной функции с носителем в одной точке)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{D}'$ *и* $\operatorname{supp} f = \{x_0\}$. *Тогда* $f = \sum_{j=0}^n c_j \delta^{(j)}(x - x_0)$.

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $\operatorname{supp} f = \{0\}$.

1. Рассмотрим произвольный отрезок, содержащий точку $x = 0$ (например $[-2;2]$). Тогда для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(-2;2)$ и для $f \in \mathcal{D}'$ справедливо представление

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{j=0}^m \langle g_j, \varphi^{(j)}\rangle = \sum_{j=0}^m \int_{-2}^2 g_j(x)\varphi^{(j)}(x)\, dx,$$

где $g_j \in L_2[-2;2]$. Тогда $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для каждой φ такой, что $\varphi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, \ldots m$.

В самом деле, если существует (построим позже) последовательность функций φ_n со свойствами

1) $\varphi_n = \varphi$ (каждая в своей окрестности нуля),

2) $\varphi_n^{(j)} \rightrightarrows 0$ на отрезке $[-2;2]$ $(j = 0, 1, \ldots m)$,

то

$$\langle f, \varphi_n\rangle = \sum_{j=0}^m \int_{-2}^2 g_j(x)\varphi_n^{(j)}(x)\, dx \to 0.$$

Следовательно, $\langle f, \varphi\rangle = 0$.

2. Пусть φ — произвольная функция из $\mathcal{D}$, обладающая свойством:

$$\exists\, m \in \mathbb{N}_0: \quad \varphi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m$$

Рассмотрим функцию $\varphi_{-1,1,1}$ и положим $\varphi_n := \varphi(x)\cdot\varphi_{-1,1,1}(nx)$.

Очевидно, что $\varphi_n = \varphi|_{(-\frac{1}{n};\frac{1}{n})}$. При этом

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k C_k^j \varphi^{(k-j)}(x)(\varphi_{-1,1,1}(nx))^{(j)} = \sum_{j=0}^k C_k^j \varphi^{(k-j)}(x)\varphi_{-1,1,1}^{(j)}(nx)\cdot n^j$$

Обозначим

$$M := \max_{0\leqslant j\leqslant m} \max_{x\in[-2;2]} |\varphi_{-1,1,1}^{(j)}(x)|.$$

Тогда $\forall\, j \leqslant m$ $|(\varphi_{-1,1,1}(nx))^{(j)}| \leqslant M\cdot n^j$

Производные функции φ достаточно оценить при $x \in [-\dfrac{2}{n}; \dfrac{2}{n}]$, так как вне этого отрезка функция $\varphi_{-1,1,1}(nx)$ равна нулю. Так как $\varphi^{(m)}(0) = 0$, то

$$\max_{x \in [-\frac{2}{n}; \frac{2}{n}]} |\varphi^{(m)}(x)| = o(1) \quad n \to \infty.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\max_{x \in [-\frac{2}{n}; \frac{2}{n}]} \varphi^{(m-1)}(x) = o(\frac{1}{n}), \quad \max_{x \in [-\frac{2}{n}; \frac{2}{n}]} \varphi^{(m-2)}(x) = o(\frac{1}{n^2}), \ldots, \max_{x \in [-\frac{2}{n}; \frac{2}{n}]} \varphi^{(m-j)}(x) = o(\frac{1}{n^j}), \quad n \to \infty.$$

Отсюда ($\varphi^{(k-j)} = \varphi^{(m-(m-k+j))}$)

$$\max_{x \in [-\frac{2}{n}; \frac{2}{n}]} |\varphi_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{k} C_k^j \max_{x \in [-\frac{2}{n}; \frac{2}{n}]} |\varphi^{(k-j)}(x)| \cdot \max_{x \in [-\frac{2}{n}; \frac{2}{n}]} |(\varphi_{-1,1,1}(nx))^{(j)}| \leqslant C \cdot o(\frac{1}{n^j}) \cdot M n^j = o(1), \quad n \to \infty.$$

3. Пусть теперь φ — произвольная функция из $\mathcal{D}$. Напишем ее тейлоровское представление (где m получено в пункте 1)

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \varphi^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \psi_{m+1}(x),$$

$\psi_{m+1}(x) = o(x^m)$ и $\psi_{m+1}^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, \ldots m$.

Умножим это представление на функцию $e(x)$, равную 1 в окрестности точки $x = 0$ (например, $e(x) = \varphi_{-1,1,1}$).

$$\varphi(x)e(x) = \sum_{k=0}^{m} \varphi^{(k)}(0) \frac{x^k e(x)}{k!} + \psi_{m+1}(x)e(x).$$

Функция $\varphi(x)e(x)$ разложена на основные функции.

Тогда

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi e \rangle = \sum_{k=0}^{m} \varphi^{(k)}(0) \langle f, \frac{x^k e(x)}{k!} \rangle + \langle f, \psi_{m+1} e \rangle \tag{3}$$

При этом $(\psi_{m+1}e)^{(j)}(0) = 0$ $j = 0, 1, \ldots, m \Rightarrow \langle f, \psi_{m+1} e \rangle = 0$.

Обозначим $c_k := (-1)^k \langle f, \frac{x^k e(x)}{k!} \rangle$.

Формулу (3) можно переписать в виде

$$f = \sum_{k=0}^{m} c_k \delta^{(k)}(x).$$

□

4 Преобразование Фурье

Определение. Прямым (соответственно обратным) преобразованием Фурье будем называть следующие действия

$$(\hat{F} f)(y) =: \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx,$$

$$(\check{F} f)(y) =: \check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx,$$

Теорема об образе F ($L_1 \to \mathbb{C}_0$).

Теорема 8. *Оператор $\hat{F}$ является непрерывным оператором из $L_1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$.*

Доказательство. 1) Так как $|f(x)e^{-ixy}| = |f(x)| \in L_1(\mathbb{R})$, то по теореме Лебега о предельном переходе получаем, что $\hat{f}(y)$ непрерывна.

2) Из соотношения

$$|\sup_{y \in \mathbb{R}} \hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$$

следует, что во-первых $\hat{f}(y)$ ограничена, а во вторых

$$f_n \to f \quad \text{в } L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}_n \rightrightarrows \hat{f}$$

3) Так как

$$\widehat{\chi_{(a,b)}} = \frac{e^{-iby} - e^{-iay}}{\sqrt{2\pi}(-iy)} \to 0 \text{ при } |y| \to \infty,$$

то для простой функции f также получаем, что $\hat{f}(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$.

Так как простые функции плотны в $L_1(\mathbb{R}$, то, с учетом пункта 2) получаем, что для произвольной функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ $\hat{f}(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$. ☐

Теорему 8 можно переформулировать так: если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}(y) = (1)$. При дополнительных требованиях на функцию f скорость убывания можно уточнить.

Теорема о связи гладкости функции со скоростью убывания ПФ.

Теорема 9. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ и $f' \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{|y|}\right)$ при $|y| \to \infty$.*

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\int f(x)e^{-ixy}dx = \int f(x)d\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) = \frac{1}{iy}\int f'e^{-ixy}dx = \frac{1}{iy}o(1) = o\left(\frac{1}{y}\right) \text{ при } |y| \to \infty.$$

Внеинтегральный член пропадает, потому что из условий $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ и $f' \in L_1(\mathbb{R})$ следует, что $f(\pm\infty) = 0$. Действительно, из формулы

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a)$$

и условия $f' \in L_1(\mathbb{R})$ следует, что существуют предельные значения $f(\pm\infty)$. Условие $f \in L_1(\mathbb{R})$ гарантирует, что эти значения равны нулю. ☐

По индукции несложно получить следующее обобщение этой теоремы

Теорема 10. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R})$ и $f^{(j)} \in L_1(\mathbb{R})$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Тогда $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{|y|^n}\right)$ при $|y| \to \infty$.*

Теорема о связи убывания функции с гладкостью ПФ.

Теорема 11. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $xf \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{f}(y) \in C^1(\mathbb{R})$ и*

$$\hat{f}'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int(-ix)f(x)e^{-ixy}dx.$$

Используем следующее следствие из теоремы Лебега:

Теорема 12. *Пусть $(X; M; \mu)$ — пространство с мерой, G — открытой множество на $\mathbb{R}$. Функция $f : X \times G \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям*

1) $\forall\, t \in G$ $f(\cdot, t) \in L_1(X, \mu)$.

2) $\dfrac{\partial f(x,\cdot)}{\partial t}$ существует на G для почти всех $x \in X$.

3) $\exists\, g \in L_1(X, \mu) : \left|\dfrac{\partial f(x,\cdot)}{\partial t}\right| \leqslant g$ для почти всех $x \in X$.

Тогда функция

$$F(t) := \int_X f(x,t)\,d\mu, \quad t \in G,$$

дифференцируема на G и

$$F'(t) := \int_X \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,d\mu, \quad t \in G.$$

Доказательство. Считаем, что условия 2) и 3) выполнены всюду. Фиксируем t_0 и последовательность $t_n \to t_0$, $n \to \infty$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t} = f'_t(x,t_0),$$

то функция $f'_t(\cdot, t_0)$ M-измерима. По теореме Лагранжа

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\right| = |f'_t(x,\xi)| \leqslant g,$$

то по теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x,t_n) - F(x,t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty}\int_X \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\,d\mu = \int_X f'_t(x,t_0)\,d\mu.$$

☐

Доказательство теоремы 11. Функция $f(x)e^{-ixy}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 12 при $G=\mathbb{R}$. Несложно получить обобщение теоремы 11:

Теорема 13. *Пусть $x^k f\in L_1(\mathbb{R})$, $k=0,1,\dots,n$. Тогда $\hat f(y)\in C^n(\mathbb{R})$.*

5 Теорема об аналитическом продолжении ПФ экспоненциально убывающей функции.

Определение. Функция f убывает экспоненциально, если существует такое число $a>0$, что $f\cdot e^{a|x|}\in L_1(\mathbb{R})$.

Теорема 14. *Пусть функция f убывает экспоненциально с параметром $a>0$. Тогда ее преобразование Фурье продолжается до функции $\hat f(z)$ $(z=y+it)$ аналитической полосе $|t|<a$.*

Доказательство. Пусть $z=y+it$, $|t|<a$. Определим $\varepsilon:=a-|t|>0$. Для функции $f(x)e^{-ixz}$ справедлива оценка

$$\left|\frac{d}{dz}f(x)e^{-ixz}\right|=\left|xf(x)e^{-ixy}e^{tx}\right|\leqslant|xf(x)|e^{a|x|}e^{-\varepsilon|x|}\in L_1(\mathbb{R}).$$

Применяя теорему 12 с изменением вещественного параметра t на комплексный параметр $z\in G:=\{z:\ |\operatorname{Im}z|<a\}$ получаем, что $\hat f(z)$ имеет комплексную производную при $|\operatorname{Im}z|<a$ и

$$\frac{d\hat f(z)}{dz}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-ixz}\,dx.$$

□

6 Теорема о непрерывности ПФ в пространстве $\mathcal{S}$.

Лемма 3. *Операторы $Mf=xf(x)$ и $Df=if'(x)$ непрерывны в $\mathcal{S}$ и справедливы коммутационные соотношения*

$$\hat FM=D\hat F;\quad \hat FD=-M\hat F;\quad \check FM=-D\check F;\quad \check FD=M\check F. \tag{4}$$

Доказательство. 1) Непрерывность.

$$\|Mf\|_{p,q}=\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p(xf)^{(q)}|\leqslant\|f\|_{p+1,q}+q\|f\|_{p,q-1}.$$

$$\|Df\|_{p,q}=\|f\|_{p,q+1}.$$

2) Коммутационные соотношения докажем только для прямого преобразования Фурье. Преобразование Фурье функций из пространства S заведомо можно дифференцировать по параметру y под знаком интеграла. Тогда

$$D\hat Ff=i\frac{d\hat f}{dy}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-ixy}\,dx=\hat FMf.$$

$$\hat FDf=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-infty}^{\infty}if'(x)e^{-ixy}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-infty}^{\infty}ie^{-ixy}\,df=-y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-infty}^{\infty}f(x)^{-ixy}\,dx=-M\hat Ff.$$

□

Рассмотрим на пространстве $\mathcal{S}$ другую систему полунорм:

$$\|f\|_{p,q,1}:=\int_{-\infty}^{\infty}|x^pf^{(q)}|\,dx,\quad p,q\in\mathbb{N}_0$$

Лемма 4. *Системы полунорм $\{\|\cdot\|_{p,q,1}\}$ и $\{\|\cdot\|_{p,q}\}$ эквивалентны.*

Доказательство. 1) Так как

$$x^pf^{(q)}(x)=\int_{-\infty}^{x}(t^pf^{(q)}(t))'\,dt=\int_{-\infty}^{x}(pt^{p-1}f^{(q)}(t)+t^pf^{(q+1)}(t))\,dt,$$

то

$$\|f\|_{p,q}\leqslant p\|f\|_{p-1,q,1}+\|f\|_{p,q+1,1}.$$

При $p=0$ первое слагаемое полагается равным нулю.

2)

$$\|f\|_{p,q,1}=\int_{-\int_{-\infty}^{\infty}|x^pf^{(q)}|\,dx=\infty}^{\infty}\frac{(1+x^2)|x^pf^{(q)}|}{1+x^2}\,dx\leqslant\pi(\|f\|_{p,q,1}+\|f\|_{p+2,q,1}).$$

□

Теорема 15. *Оператор $\hat{F}$ непрерывен в $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Оценим $\|\hat{F}f\|_{p,q}$:

$$\|\hat{F}f\|_{p,q} = \sup_{y\in\mathbb{R}} |M^p D^q \hat{F} f| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\hat{F} D^p M^q f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |(x^q f)^{(p)}|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\min(p,q)} C_p^j \frac{q!}{(q-j)!} \int_{-\infty}^{\infty} |x^{q-j} f^{(p-j)}(x)|\, dx = \sum_{j=0}^{\min(p,q)} c_j \|f\|_{q-j,p-j,1}.$$

□

Лемма 5. *Пусть оператор $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ коммутирует с оператором M. Тогда если для функций $f, g \in \mathcal{S}$ выполнено $f(x_0) = g(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то $(Af)(x_0) = (Ag)(x_0)$.*

Доказательство. Так как для функции $h(x) := f(x) - g(x)$ выполнено $h(x_0) = 0$, то $h(x) = (x - x_0)w(x) = (M - Ix_0)w(x)$, где $w \in \mathcal{S}$. Из свойства $AM = MA$ получаем, что $(Ah)(x) = (x - x_0)Aw(x)$, откуда $(Ah)(x_0) = 0$. □

Теорема 16. *Всякий оператор $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, коммутирующий с оператором M, есть оператор умножения на функцию $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Возьмем функцию $\varphi_{x_0} := \varphi_{x_0-1,x_0+1,1}$. Положим $a(x_0) := (A\varphi_{x_0})(x_0)$.

Тогда для произвольной функции $f \in \mathcal{S}$ значения функций f и $f(x_0)\varphi_{x_0}$ совпадают в точке x_0. Поэтому

$$(Af)(x_0) = f(x_0)(A\varphi_{x_0})(x_0) = a(x_0)f(x_0).$$

Поскольку точка x_0 произвольная, то

$$(Af)(x) = a(x)f(x).$$

□

7 Теорема об обратимости ПФ в пространстве $\mathcal{S}$.

Теорема 17. *Преобразование Фурье обратимо в $\mathcal{S}$ и справедлив формула обращения: $\check{F}\hat{F} = I$.*

Доказательство. Из коммутационных соотношений (4) следует, что оператор $\check{F}\hat{F}$ перестановочен в $\mathcal{S}$ с оператором M. Поэтому по теореме 16 получаем, что $\check{F}\hat{F}f = a(x)f(x)$ для всякой функции $f \in \mathcal{S}$.

Из тех же коммутационных соотношений (4) следует, что оператор $\check{F}\hat{F}$ перестановочен в $\mathcal{S}$ и с оператором D. Поэтому $a(x) = const$, т.е. $\check{F}\hat{F} = cI$. Убедиться, что $c = 1$ можно, вычислив, например, преобразование Фурье функции $e^{-x^2/2}$. □

7.1 Преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$

Теорема 18. *Существует единственный оператор $\tilde{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ непрерывный в $*$-слабой топологии и продолжающий $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ (соответствующая диаграмма будет коммутативной).*

$$\langle \tilde{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \hat{F}\varphi \rangle$$

Доказательство. В силу $*$-слабой полноты $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}'$ строим $f_n \in \mathcal{S}$, $f_n \to f$ в $\mathcal{S}'$ □

Теорема 19. *В $\mathcal{S}'$ справедлива формула обращения: $\hat{F}\check{F} = \check{F}\hat{F} = I$.*

Следствие. 2. *Оператор $\hat{F}$ инъективен в $L_1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Рассмотрим операторы вложения $J_1 : L_1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'$, $J_2 : C_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'$. Эти операторы непрерывны:

$$|\langle J_1 f, \varphi \rangle| = \left| \int f(x)\varphi(x)\, dx \right| \leqslant \|\varphi\|_{0,0} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})},$$
$$|\langle J_2 f, \varphi \rangle| = \left| \int f(x)\varphi(x)\, dx \right| \leqslant \pi \|f\|_{C_0(\mathbb{R})} \cdot \|\varphi\|_{0,0,1}$$

Но в $\mathcal{S}'$ $\hat{F}$ — изоморфизм. □

8 Интегральное равенство Парсеваля. Теорема Планшереля (Продолжение ПФ в L_2).

Теорема 20. *Для произвольных $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ справедливо*

$$(\hat{\varphi}, \hat{\psi})_{L_2(\mathbb{R})} = (\varphi, \psi)_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Доказательство.

$$(\hat{\varphi}, \hat{\psi})_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\varphi}(y) \overline{\int \psi(x) e^{-ixy}\, dx}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{\psi(x)} \left(\int \hat{\varphi}(y) e^{ixy}\, dy \right) dx = \int \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, dx$$

□

Таким образом $\hat{F}\Big|_{\mathcal{S}}$ есть изометрический оператор в $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 21. *Пространство $\mathcal{D}$ (и $\mathcal{S}$) плотно в $L_2(\mathbb{R})$.*
Если $\varphi \in L_1(\mathbb{R}) \cup L_2(\mathbb{R})$. Тогда существует последовательность $\varphi_N \in \mathcal{D}$ $N = 1, 2, \ldots$, обладающая свойством:
1) если $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, то $\|\varphi - \varphi_N\|_1 \to 0$;
2) если $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то $\|\varphi - \varphi_N\|_2 \to 0$.
В частности, если $\varphi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то $\|\varphi - \varphi_N\|_{1,2} \to 0$.

Доказательство. Считаем, что $\varphi \geqslant 0$ (т.к. каждая функция представима в виде линейной комбинации четырех неотрицательных функций).

$$\varphi_N := \min\{\varphi \cdot \chi_{[-N,N]}, N\} = \begin{cases} \varphi \chi_{[-N,N]} & \text{при} \quad \varphi \leqslant N, \\ N \chi_{[-N,N]} & \text{при} \quad \varphi > N, \end{cases}$$

Тогда (считаем, что $\varphi \geqslant 0$)

$$\|\varphi - \varphi_N\|_1 = \int_{\{x:\varphi \leqslant N\}} (\varphi - \varphi_N)\, d\mu + \int_{\{x:\varphi > N\}} (\varphi - \varphi_N)\, d\mu = \int_{\{x:\varphi \leqslant N\} \cap \{x:|x|>N\}} \varphi\, d\mu + \int_{\{x:\varphi > N\}} (\varphi - N)\, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\{x:\varphi \leqslant N\} \cap \{x:|x|>N\}} \varphi\, d\mu + \int_{\{x:\varphi > N\}} \varphi\, d\mu \to 0$$

Для каждого N выбираем $\varphi_{N,n} \in \mathcal{D}(-N; N)$ $\varphi_{N,n} \to \varphi_N$ в $L_2[-N; N]$ (а значит и в $L_1[-N; N]$). Для каждого N найдем $n(N)$ так, чтобы

$$\|\varphi - \varphi_{N,n(N)}\|_{1,2} < \frac{1}{N}.$$

□

Теорема 22. *Пусть $\varphi_n \in L_2(\mathbb{R})$ — непрерывные функции. Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в $L_2(\mathbb{R})$ и $\varphi_n \rightrightarrows \psi$. Тогда $\varphi = \psi$ в $L_2(\mathbb{R})$*

Доказательство. Для любого N $\varphi_n \chi_{[-N;N]} \to \varphi \chi_{[-N;N]}$ в $L_2[-N; N]$ и $\varphi_n \chi_{[-N;N]} \rightrightarrows \psi \chi_{[-N;N]}$.
В $L_2[-N; N]$ из равномерной сходимости следует интегральная. Следовательно $\varphi \chi_{[-N;N]} = \psi \chi_{[-N;N]}$. □

Теорема 23 (Планшерель)**.** *Существует единственный унитарный оператор $U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, такой что для любой $\varphi \in L_{1,2} \Rightarrow U\varphi = \hat{F}\varphi$ почти всюду.*

Доказательство. Из интегрального равенства Парсеваля следует, что $\hat{F}|_S$ изометричный оператор в $L_2(\mathbb{R})$. В силу плотности S в $L_2(\mathbb{R})$ получаем единственный оператор U как продолжение $\hat{F}$.
Рассмотрим действие U на функции $\varphi \in L_{1,2}$.
Строим последовательность $\varphi_n \in \mathcal{D}$, сходящуюся к φ по нормам L_2 и L_1. Тогда $U\varphi_n = \hat{F}\varphi_n$. При этом $U\varphi_n \to U\varphi$ в L_2 и $\hat{F}\varphi_n \rightrightarrows \hat{F}\varphi$. Следовательно $U\varphi = \hat{F}\varphi$. □

В дальнейшем этот унитарный оператор в $L_2(\mathbb{R})$ будем обозначать тем же символом $\hat{F}$.

8.1 Теорема о полноте функций Чебышева–Эрмита

Теорема 24. *Система функций* $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ $n = 0, 1, \ldots$ *полна в* $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Предположим, что это не так: $\exists\, h \in L_2(\mathbb{R}) : h \perp x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ $n = 0, 1, \ldots$.

Функция $h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \in L_1(\mathbb{R})$ и экспоненциально убывает $\Rightarrow \hat{F}h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ продолжается до целой функции $g(z)$. При этом

$$\frac{d^n g}{dz^n}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (-ix)^n h(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad g \equiv 0 \text{ (по теореме единственности)}.$$

В силу инъективности оператора $\hat{F}$ получаем, что $h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow h \equiv 0$. □

Теорема 25. *Пусть* $e_n := p_n e^{-\frac{x^2}{2}}$ *— система функций, полученная из системы* $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ $n = 0, 1, \ldots$ *с помощью ортогонализации Грама–Шмидта в* $L_2(\mathbb{R})$. *Тогда они образуют ортогональный базис пространства* $L_2(\mathbb{R})$ *и* $\hat{F}e_n = (-i)^n e_n$.

Доказательство. То, что e_n образует базис, следует из предыдущей теоремы.

Определим пространства $H_n := \langle e_0, e_1, \ldots, e_n \rangle$ Очевидно $e_n = (a_n x^n + h_{n-1})e^{-\frac{x^2}{2}}$. Так как $\hat{F}M = D\hat{F}$, $\hat{F}^{-1}M = -D\hat{F}^{-1}$, то $\hat{F}g, \hat{F}^{-1}g \in H_k$, если $g \in H_{k-1}$ причем для произвольной функции $g \in H_{n-1}$ имеем

$$(\hat{F}e_n, g) = (\hat{F}e_n, \hat{F}\hat{F}^{-1}g) = (e_n, \underbrace{\hat{F}^{-1}g}_{\in H_{n-1}}) = 0.$$

Т. е. $\hat{F}e_n = ce_n$, но $\hat{F}(a_n x^n)e^{-\frac{x^2}{2}} = a_n D^n \hat{F} e^{-\frac{x^2}{2}} = (a_n(-i)^n + h_{n-1})e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow c = (-i)^n$. □

9 Свертка.

Сверткой двух функций называется следующая операция

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t)\, dt. \tag{5}$$

Теорема 26. *Если* $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, *то свертка существует и* $f * g \in L_1(\mathbb{R})$. *При этом*

$$\|f * g\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}.$$

Доказательство. Очевидно, что если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то $f(u)g(v) \in L_1(\mathbb{R}^2)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v)\, du \in L_1(\mathbb{R})$.

Сделав в последнем интеграле измеримую в $\mathbb{R}^2$ замену $t := u$, $v := x - t$, получим, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\, dt \in L_1(\mathbb{R})$.

Неравенство для норм следует из теорема Фубини и следующих оценок

$$\int \left| \int f(t) g(x - t)\, dt \right| dx \leqslant \int \left(\int |g(x - t)|\, dx \right) |f(t)|\, dt = \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}.$$

□

9.1 Свойства свертки.

Пусть $f, g, h \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда

1. $f * g = g * f$;
2. $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$;
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$;
4. Если дополнительно одна из функций дифференцируема, например, $g \in C^1(\mathbb{R})$, то свертка дифференцируема и $(f * g)' = f * g'$. В силу свойства 1 неважно, какая из функций f и g дифференцируема.
5. $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, где сумма понимается в том смысле, что $x \in \operatorname{supp}(f * g)$, если $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \operatorname{supp} f$, $x_2 \in \operatorname{supp} g$.
6. $\hat{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \hat{F}f \cdot \hat{F}g$.

Доказательство. Свойство 1. Замена переменных $x-t=s$ ($t=x-s$, $dt=ds$)

Свойство 2 это просто линейность интеграла.

Свойство 3 получается с помощью теоремы Фубини.

Свойство 4 — следствие теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

Свойство 5. Заметим что $x=t+(x-t)$. Поэтому если $t\notin \operatorname{supp} f$ или $x-t\notin \operatorname{supp} g$, то $(f*g)(x)=0$, т.е. $x\notin \operatorname{supp}(f*g)$.

Свойство 6. Используем теорему Фубини и замену переменных.

$$\hat{F}(f*g)(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left(\int f(t)g(x-t)\,dt\right)e^{-ixy}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)\left(\int g(x-t)e^{-ixy}\,dx\right)\,dt$$

Во внутреннем интеграле делаем замену переменных: $x-t=s$, $x=t+s$, $dx=ds$

$$\hat{F}(f*g)(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)\left(\int g(s)e^{-i(t+s)y}\,ds\right)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)e^{-ity}\,dt\int g(s)e^{-isy}\,ds=\sqrt{2\pi}\hat{f}\cdot\hat{g}.$$

□

Посмотрим на свертку с такой позиции. Зафиксируем функцию $f\in L_1(\mathbb{R})$ и определим оператор $S_f: L_1(\mathbb{R})\to L_1(\mathbb{R})$:

$$S_f g=f*g.$$

Свойство 2 позволяет означает, что этот оператор линейный, а из теоремы 26 следует его ограниченность.

9.2 Свертка обобщенных функций

9.2.1 Свертка обобщенной функции и основной

Пусть $f,\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{S})$. Формулу (5) можно интерпретировать как действие регулярной обобщенной функции на основную:

$$(f*\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(x-t)\,dt=\langle f(t),\varphi(x-t)\rangle$$

В силу плотности пространства основных функций в соответствующем пространстве обобщенных функций (в $*$-слабой топологии) свертку можно продолжить на обобщенные функции. А именно, пусть $f\in\mathcal{D}'(\mathcal{S}')$, а $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{S})$ соответственно. Определим

$$(f*\varphi)(x)=\langle f(t),\varphi(x-t)\rangle.$$

Пример. Покажем, что свертка с $\delta(x)$ есть тождественный оператор в $\mathcal{D}(\mathcal{S})$:

$$(\delta*\varphi)(x)=\langle\delta(t),\varphi(x-t)\rangle=\varphi(x).$$

Аналогично,

$$(\delta'*\varphi)(x)=\langle\delta'(t),\varphi(x-t)\rangle=-\langle\delta(t),(\varphi(x-t))'\rangle=\varphi'(x).$$

9.2.2 Свертка двух обобщенных функций

Свертка обобщенной и основной функции является обычной функцией класса C^∞. Но при этом она может не принадлежать какому-нибудь пространству основных функций. Однако, например, если свертка $f*\varphi\in\mathcal{D}$, то к ней можно применить другую обобщенную функцию. На этом пути постараемся определить свертку двух обобщенных функций.

Для начала пусть f_1, f_2 — регулярные обобщенные функции носитель которых компактен (например, $f_1,f_2\in\mathcal{D}$. Тогда $f_1*f_2\in\mathcal{D}$. Для любой основной функции $\varphi\in\mathcal{D}$ можно определить $\langle f_1*f_2,\varphi\rangle$:

$$\langle f_1*f_2,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(x-t)\,dt\right)\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x-t)\varphi(x)\,dx\right)\,dt.$$

При фиксированном t сделаем замену переменной x: $x-t=s$, $x=t+s$, $dx=ds$. Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_2(s)\varphi(s+t)\,ds\right)\,dt.$$

Тогда для функций $f_1,f_2\in\mathcal{D}'$ с компактным носителем определим

$$\langle f_1*f_2,\varphi\rangle:=\langle f_1(t),\langle f_2(s),\varphi(s+t)\rangle\rangle.$$

Пример. Проверим, что $\delta^{(k)} * \delta^{(n)} = \delta^{(k+n)}$. Для произвольной $\varphi \in \mathcal{D}$ имее

$$\langle \delta^{(k)}(t), \langle \delta^{(n)}(s), \varphi(s+t) \rangle \rangle = \langle \delta^{(k)}(t), \varphi^{(n)}(t) \rangle = \varphi^{(k+n)}(0) = \langle \delta^{(k+n)}(s), \varphi(s) \rangle$$

Определим пространство $\mathcal{D}_+ := \{\varphi \in \mathcal{D} : \ \operatorname{supp} \varphi \subset [0; +\infty)\}$ и пространство линейных непрерывных на этом пространстве функционалов $\mathcal{D}'_+$.

Если $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'_+$ — регулярные обобщенные функции, то легко видеть, что носитель $f_1 * f_2$ компактен, поэтому для этого пространства также определена свертка:

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{D}'_+, \ \varphi \in \mathcal{D}_+ \quad \langle f_1 * f_2, \varphi \rangle := \langle f_1(t), \langle f_2(s), \varphi(s+t) \rangle \rangle.$$

9.3 Свертка в $L_2(\mathbb{R})$.

Известно, что преобразование Фурье есть биективное преобразование в $\mathcal{S}$ и в $L_2(\mathbb{R})$.

Это наблюдение позволяет определить свертку функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ с обобщенной функцией f из $\mathcal{S}'$. При некоторых ограничениях на класс функций из $\mathcal{S}'$ этот оператор будет ограниченным в $L_2(\mathbb{R})$.

Для функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ (этот класс плотен в $\mathcal{S}'$ в $*$-слабой топологии) и $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ определим оператор свертки S_f через подобный оператор

$$\hat{F} S_f \varphi = \sqrt{2\pi} \hat{F} f \cdot \hat{F} \varphi.$$

В силу свойств преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ $\hat{F}\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, а $\hat{F} f \in C_0(\mathbb{R}) \subset L_\infty(\mathbb{R})$, поэтому оператор, стоящий в правой части является ограниченным в $L_2(\mathbb{R})$.

Потребуем от $f \in \mathcal{S}'$ такого свойства: $\hat{F} f \in L_\infty(\mathbb{R})$. Тогда определим свертку такой функции с произвольной функцией $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ следующим образом

$$S_f \varphi := f * \varphi = (\hat{F})^{-1} A_{\sqrt{2\pi}\hat{F} f} \hat{F} \varphi,$$

где оператор $A_{\sqrt{2\pi}\hat{F} f}$ есть оператор умножения в $L_2(\mathbb{R})$ на функцию $\sqrt{2\pi}\hat{F} f$