

**Лекция 16 по функциональному анализу 14 декабря 2020 года,  
мехмат, 3 курс, 3 поток.**

**Тема 5: Продолжение меры по Лебегу (дополнение).**

Установим утверждение о структуре измеримых по Лебегу множеств. Это аналог утверждения о том, что в случае классической меры Лебега измеримое множество есть разность борелевского множества (точнее, множества типа  $G_\delta$ ) и множества меры нуль.

**Теорема 5.7.** Пусть множество  $A$  измеримо по Лебегу относительно меры  $m$  на полукольце  $S$ , причем  $\mu A < \infty$ . Тогда найдутся множества  $B_{n,k} \in R(S)$ , для которых выполнены следующие условия.

1. При каждом  $n$  выполнены включения  $B_{n,1} \subseteq B_{n,2} \subseteq \dots \subseteq B_{n,k} \subseteq \dots$
2. Для множеств  $B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$  выполнены включения  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n \supseteq \dots$  и условия  $\mu B_n < \infty$ .
3. Для множества  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$  выполнены условия  $B \supseteq A$  и  $\mu(B) = \mu(A)$ , т.е.  $\mu(B \setminus A) = 0$ .

**Доказательство.**

Для произвольного  $n$  найдутся такие  $\Delta_{n,k} \in S$ , что

$$A \subseteq C_n = \bigcup_k \Delta_{n,k} \quad \text{и} \quad \mu(C_n) \leq \sum_k m(\Delta_{n,k}) < \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Действительно, для конечной меры это непосредственно вытекает из определения внешней меры. Для  $\sigma$ -конечной меры разобьем единицу  $X$  на множества  $X_s$  конечной меры и покроем  $X_s \cap A$  элементами  $\Delta_{n,s,j} \in S$  с суммой мер меньшей, чем  $\mu(X_s \cap A) + \frac{1}{n \cdot 2^s}$ .

Положим  $B_n = \bigcap_{j=1}^n C_j$  и  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ . Тогда  $B_n \supset B_{n+1}$  и

$$\mu(A) \leq \mu(B) \leq \inf_n \mu(B_n) \leq \inf_n \mu(C_n) = \mu(A).$$

Найдём такие  $D_{n,k} \in S$ , что  $B_n = \bigcup_k D_{n,k}$ . Действительно, при  $n = 1$  можно взять  $D_{1,k} = \Delta_{1,k}$ ; если утверждение доказано для  $B_{n-1}$ , то

$$B_n = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{n-1,k} \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{n,i} \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} (D_{n-1,k} \cap \Delta_{n,i}),$$

где  $(D_{n-1,k} \cap \Delta_{n,i}) \in S$  по второй аксиоме полукольца.

Положим теперь  $B_{n,k} = \bigcup_{i=1}^k D_{n,i}$ , тогда  $B_{n,k} \subset B_{n,k+1}$  и  $B_{n,k} \in R(S)$ . Итак, построенные множества удовлетворяют условиям теоремы.

**Тема 13: Абсолютно непрерывные функции (дополнение).**

**Лемма 13.3.** Пусть  $g$  — строго возрастающая абсолютно непрерывная функция  $[a, b] \rightarrow [c, d]$ . Тогда для любого классически измеримого множества  $A \subset [c, d]$  выполнено равенство

$$\mu(A) = \int_{[c,d]} \chi_A(y) dy = \int_{[a,b]} \chi_A(g(x)) g'(x) dx. \quad (*)$$

**Доказательство.**

Если  $E = [\alpha, \beta]$ , то, находя такие  $\alpha'$  и  $\beta'$ , что  $\alpha = g(\alpha')$ ,  $\beta = g(\beta')$ , по теореме 13.2 имеем

$$\mu(E) = \beta - \alpha = g(\beta') - g(\alpha') = \int_{[\alpha', \beta']} g'(x) dx = \int_{[a, b]} \chi_E(g(x))g'(x) dx.$$

Так как меры одноточечных множеств равны нулю, то это верно и для других типов промежутков. По линейности (\*) верно для любого множества  $E \in R(S)$ . Если (\*) верно для множеств  $E_k$ , где  $E_k \subset E_{k+1}$  и  $E = \bigcup_k E_k$ , то в силу неотрицательности  $g'$  имеем

$$\chi_{E_k}(y) \uparrow \chi_E(y), \quad \chi_{E_k}(g(x))g'(x) \uparrow \chi_E(g(x))g'(x),$$

а тогда по теореме Б. Леви (\*) верно и для  $E$ . Аналогично рассматривается случай убывающей последовательности множеств. Тем самым, каково бы ни было множество  $A \in \mathfrak{M}$ , равенство (\*) верно для множества  $B$ , построенного по  $A$  в теореме 5.7 о структуре измеримых множеств.

Докажем теперь (\*) для случая, когда  $\mu E = 0$ ; в силу теоремы 5.7 отсюда будет следовать утверждение леммы (вычитанием из равенства для  $B$  равенства для  $B \setminus A$ ). Если  $\mu E = 0$ , то по теореме о структуре измеримых множеств найдется множество  $B_0 \supset E$ , для которого  $\mu B_0 = 0$ , а утверждение уже доказано. Тогда

$$\mu(B_0) = \int_{[c, d]} \chi_{B_0}(y) dy = \int_{[a, b]} \chi_{B_0}(g(x))g'(x) dx = 0,$$

следовательно,  $\chi_{B_0}(g(x))g'(x) = 0$  п.в., тем более,  $\chi_E(g(x))g'(x) = 0$ , а тогда

$$0 = \mu(E) = \int_{[c, d]} \chi_E(y) dy = \int_{[a, b]} \chi_E(g(x))g'(x) dx = 0.$$

Лемма доказана.

**Теорема 13.5.** (Замена переменной в интеграле Лебега.) Пусть  $g$  — строго возрастающая абсолютно непрерывная функция  $[a, b] \rightarrow [c, d]$ . Тогда для любой функции  $f \in L([c, d])$  выполнено равенство

$$\int_{[c, d]} f(y) dy = \int_{[a, b]} f(g(x))g'(x) dx. \quad (**)$$

**Доказательство.**

Если  $f$  — индикатор измеримого множества, то утверждение доказано в лемме 13.3. По линейности (\*\*) верно для любой простой функции.

Для неотрицательной интегрируемой функции  $f(x)$  подберем по лемме 7.1 последовательность  $\{h_n(x)\}$  простых функций:  $h_n(x) \uparrow f(x)$  всюду. В силу монотонности  $g(x)$  её производная неотрицательна во всех точках, где она существует. Поэтому  $h_n(g(x))g'(x) \uparrow f(g(x))g'(x)$  п.в. Тогда к обеим частям равенства

$$\int_{[c, d]} h_n(y) dy = \int_{[a, b]} h_n(g(x))g'(x) dx$$

применима теорема Б. Леви, и она даёт равенство (\*\*) для  $f$ .

Общий случай получается разложением функции  $f$  в разность положительной и отрицательной частей и вычитанием соответствующих равенств. Теорема доказана.

### Тема 9: Произведения мер (продолжение).

Следующие две теоремы являются аналогами геометрической интерпретации интеграла как площади для случая произвольных мер.

**Теорема 9.4.** Пусть  $(X_j, M_j, \mu_j)$ ,  $j = 1, 2$  — пространства с полными мерами,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ , а множество  $A \subseteq X_1 \times X_2$  измеримо относительно произведения мер и  $\mu A < \infty$ . Для  $x \in X_1$  положим

$$A_x = \{y \in X_2 : (x, y) \in A\}.$$

Тогда

$$\mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_x) d\mu_1, \quad (i)$$

причем интеграл в правой части корректно определен, то есть  $A_x \in M_2$  для  $\mu_1$ -почти всех  $x$ , а функция  $\varphi_A(x) = \mu_2(A_x)$  будет  $M_1$ -измерима и интегрируема по Лебегу на  $X_1$ .

#### Доказательство.

Положим  $\varphi_A(x) = \mu_2(A_x)$ . Если  $A \in S = M_1 \times M_2$ , то есть  $A = A_1 \times A_2$ , то

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \mu_2(A_2), & \text{если } x \in A_1; \\ 0, & \text{если } x \notin A_1. \end{cases}$$

Поскольку  $\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ , то равенство (i) в данном случае верно. Тогда оно верно и для множеств из  $R(S)$ , поскольку их можно представить в виде конечного дизъюнктного объединения элементов  $S$ , мера аддитивна, а интеграл линеен.

Пусть теперь  $A$  — произвольное измеримое множество. Построим для него множества  $B$ ,  $B_n$  и  $B_{n,k}$ , указанные в теореме 5.7. Так как  $B_n$  — объединение расширяющихся множеств  $B_{n,k}$ , то  $\mu(B_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu B_{n,k}$  по свойству непрерывности меры снизу, и  $\varphi_{B_{n,k}}(x) \uparrow \varphi_{B_n}(x)$  при  $k \rightarrow \infty$ . К последовательности функций  $\{\varphi_{B_{n,k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  применима теорема Б. Леви (интегралы ограничены в совокупности величиной  $\mu B_n$ ). Поэтому равенство (i), справедливое для  $B_{n,k} \in R(S)$ , справедливо и для множеств  $B_n$ .

Аналогично, так как  $B_n \supset B_{n+1}$  и  $B$  — их пересечение, то  $-\varphi_{B_n}(x) \uparrow -\varphi_B(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . К последовательности функций  $\{-\varphi_{B_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  применима теорема Б. Леви (интегралы ограничены в совокупности величиной  $-\mu B_1$  снизу и нулём сверху). Поскольку  $\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu B_n$  по свойству непрерывности меры сверху, то предельным переходом из равенств (i) для  $B_n$  получаем равенство для  $B$ .

Итак, в силу теоремы 5.7 нам достаточно доказать теперь (i) для случая  $\mu(A) = 0$ , а затем вычесть полученные равенства друг из друга.

Пусть  $\mu(A) = 0$ , и  $B_0$  — множество, построенное по множеству  $A$  согласно теореме 5.7. Тогда  $\mu(B_0) = 0$  и по доказанному

$$0 = \mu(B_0) = \int_{X_1} \varphi_{B_0}(x) d\mu_1.$$

Поэтому  $\varphi_{B_0}(x) = \mu_2(B_{0x}) = 0$  п.в. Но всегда  $A_x \subseteq B_{0x}$ , а тогда  $\varphi_A(x) = 0$  п.в. в силу полноты меры  $\mu_2$ , и (i) выполнено для множества  $A$ . (Отметим здесь, что для тех  $x$ , для которых  $\varphi_{B_0}(x) = \mu_2(B_{0x}) > 0$ , множество  $A_x$  может оказаться неизмеримым, но в силу полноты меры  $\mu_1$  недоопределенность функции  $\varphi_A$  на множестве меры нуль не существенна.) Теорема доказана.

**Теорема 9.5.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  — пространство с полной мерой, а  $\mu_2$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}$ . Пусть  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $f$  — интегрируемая по Лебегу неотрицательная функция на множестве  $E \in M_1$ . Тогда множество  $A = A(f) = \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y < f(x)\}$  измеримо относительно  $\mu$  и

$$\mu(A) = \int_E f(x) d\mu_1.$$

**Доказательство.**

Если  $f(x) = \sum_k c_k \chi_{E_k}(x)$  — простая функция, то  $A(f) = \bigsqcup_k E_k \times [0, c_k)$  — измеримо и

$$\mu A(f) = \sum_k c_k \mu_1 E_k = \int_E f(x) d\mu_1.$$

Для  $f \in L(X)$ ,  $f(x) \geq 0$ , по лемме 7.1 найдется последовательность простых функций  $\{f_n\}$ ,  $f_n \uparrow f$ . Поэтому множество  $A(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f_n)$  измеримо, и, переходя в равенстве для  $f_n$  к пределу (в левой части — по теореме 4.5 о непрерывности меры снизу, в правой части — по лемме 7.7), получаем утверждение теоремы.

**Теорема 9.2.** (Фубини) Пусть  $(X_j, M_j, \mu_j)$ ,  $j = 1, 2$  — пространства с полными мерами,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$  — их прямое произведение, определенное на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$  с единицей  $X = X_1 \times X_2$ . Пусть функция  $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$ . Тогда

1. Функция  $f(x, \cdot)$  измерима и интегрируема на  $X_2$  по мере  $\mu_2$  при  $\mu_1$ -почти всех  $x \in X_1$ .
2. Функция  $I_f(x) = \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$  (доопределенная произвольным образом на множестве меры нуль, где этот интеграл не существует) измерима на  $X_1$  и интегрируема относительно меры  $\mu_1$ .
3. Имеет место равенство

$$\int_X f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{X_1} I_f(x) d\mu_1(x) = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x). \quad (ii)$$

Кратко это выражают следующим образом: из существования двойного интеграла следует существование повторного и их равенство.

**Замечание.** Из соображений симметрии ясно, что существует и другой повторный интеграл, который тоже равен двойному, в частности, при этом повторные интегралы равны. Но из существования повторных интегралов не следует их равенства, а даже если они равны, то отсюда не следует существования двойного интеграла.

### Доказательство.

Если  $f(x, y) = \chi_E(x, y)$ , где  $E \in \mathfrak{M}$ ,  $\mu E < \infty$ , то в обозначениях теоремы 9.4 имеем  $f(x, \cdot) = \chi_{E_x}(\cdot)$ , и по этой теореме  $f(x, \cdot)$  будет  $M_2$ -измерима для  $\mu_1$ -почти всех  $x$ , а также  $I_f(x) = \mu_2(E_x) \in L(X_1)$ , а равенство (ii) превращается в равенство (i), т.е. все утверждения теоремы Фубини выполнены. По линейности они выполнены для любой простой функции.

Пусть теперь  $f(x, y)$  — произвольная неотрицательная интегрируемая функция, а  $\{f_n\}$ ,  $f_n \uparrow f$  — последовательность простых функций, которая построена в лемме 7.1. Функция  $f_n(x, \cdot)$  измерима при  $x \notin R_n$ , где  $\mu_1 R_n = 0$ . При  $x \notin R = \bigcup_n R_n$  (т.е. при почти всех  $x$ ) функция  $f(x, \cdot)$  будет поточечным пределом измеримых функций  $f_n(x, \cdot)$ , следовательно, сама будет измерима. По построению  $\{I_{f_n}(x)\}$  — неубывающая последовательность на дополнении к  $R$ , поэтому всюду там имеет конечный либо бесконечный предел. При каждом  $x \notin R$  соответственно либо по теореме Б.Леви имеем

$$I_f(x) = \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_2} f_n(x, y) d\mu_2(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{f_n}(x)$$

либо  $I_f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{f_n}(x) = +\infty$ . Но так как

$$\int_{X_1} I_{f_n}(x) d\mu_1(x) = \int_X f_n(x, y) d\mu(x, y) \leq \int_X f(x, y) d\mu(x, y),$$

то к последовательности  $\{I_{f_n}(x)\}$  применима теорема Б.Леви, её предел  $I_f(x)$  конечен почти всюду и

$$\int_{X_1} I_f(x) d\mu_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_1} I_{f_n}(x) d\mu_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x, y) d\mu(x, y) = \int_X f(x, y) d\mu(x, y)$$

(последнее равенство получается опять из теоремы Б.Леви). Это доказывает теорему для неотрицательных функций.

Для функции  $f$ , принимающей не только неотрицательные значения, утверждение получается, если представить её как разность положительной и отрицательной частей и вычесть равенства для  $f_+$  и  $f_-$  друг из друга.