Лекция 15 по функциональному анализу 7 декабря 2020 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 14: Преобразование Фурье интегрируемых функций.

Определение. Пусть задана комплекснозначная функция $f \in L_1(\mathbb{R})$. Ее *преобразованием Фурье* называется функция $\widehat{f}$ (вещественного) параметра ξ, определяемая формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\,dx.$$

Здесь и далее все интегралы по прямой и промежуткам на ней понимаются как интегралы Лебега по классической мере.

Замечание.

1. В разных источниках определение может отличаться знаком показателя экспоненты, дополнительным множителем 2π у экспоненты или другим множителем перед интегралом.

2. В некоторых случаях рассматривается и преобразование Фурье как функция комплексного параметра, но тогда для сходимости интеграла нужно наложить на f более жесткие условия. Типичное условие будет рассмотрено в конце этой лекции.

3. Рассматриваются также преобразования Фурье функций многих переменных. Они определяются формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx,$$

где x и ξ — векторы из $\mathbb{R}^m$.

Теорема 14.1. *Пусть функция f — из $L_1(\mathbb{R})$. Тогда ее преобразование Фурье существует и является непрерывной функцией, стремящейся к нулю на $\pm\infty$, причем оно удовлетворяет оценке*

$$\|f\|_{C_0(\mathbb{R})} = \max_{\xi\in\mathbb{R}} |f(\xi)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1.$$

Доказательство.

Оценка для максимума преобразования Фурье следует из неравенства

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\,dx \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx.$$

Далее, если $f = \chi_{[a,b]}$, то

$$\widehat{\chi_{a,b}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-i\xi x}\,dx = \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\sqrt{2\pi}\xi} \text{ при } \xi \neq 0.$$

Поскольку у этого отношения есть конечный предел в нуле, равный значению

$$\widehat{\chi_{a,b}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}},$$

то полученная функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Из формулы видно, что она стремится к нулю на бесконечности. Поскольку оба этих свойства сохраняются для линейных комбинаций, то преобразование Фурье любой линейной комбинации индикаторов отрезков обладает нужными свойствами.

Но для любой интегрируемой функции f найдется последовательность $\{f_n\}$ линейных комбинаций индикаторов отрезков, сходящаяся к ней по норме L_1. Действительно, в доказательстве теоремы 11.4 было установлено, что функции вида

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{H_k}(x),$$

где H_k — элементы некоторого базиса меры, всюду плотны в $L_1([a,b])$ для любого отрезка $[a,b]$. Для классической меры Лебега в качестве базиса меры берется система конечных объединений отрезков.

Тогда в силу установленной выше оценки имеем $\widehat{f_n} \rightrightarrows \widehat{f}$. Но равномерный предел непрерывных функций непрерывен, и равномерный предел функций, стремящихся к нулю на бесконечности, тоже стремится к нулю на бесконечности. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция f интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$, то*

$$\lim_{R\to\pm\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \sin Rx \, dx = 0.$$

Доказательство.
В силу формулы Эйлера $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \sin Rx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{i\sqrt{2}} (\widehat{f}(R) - \widehat{f}(-R)),$$

и утверждение следствия вытекает из теоремы.

Обсудим теперь вопрос о нахождении (восстановлении) функции, преобразование Фурье которой известно. Это осуществляется, при соответствующих условиях, с помощью обратного преобразования Фурье, которое определяется формулой

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} \, dx.$$

Поскольку преобразование Фурье функции из L_1, вообще говоря, не обязано лежать в L_1, то нужно накладывать на функцию дополнительные условия и/или понимать этот интеграл иначе, чем как интеграл Лебега.

Мы установим одно конкретное условие, позволяющее восстановить значение функции f в заданной точке.

Теорема 14.2 (Условие Дини). *Пусть функция f из $L_1(\mathbb{R})$ такова, что в некоторой точке x при некотором $\delta > 0$ выполнено условие*

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|}\, dt < \infty.$$

Тогда справедлива формула обращения

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Доказательство.
Используя теорему Фубини, для произвольного конечного $R > 0$ получаем равенство

$$\sigma_R(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} e^{i\xi x}\, dt\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \int\limits_{-R}^{R} e^{i\xi(x-t)}\, d\xi\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\sin R(t-x)}{t-x}\, dt. \quad (*)$$

Делая замену переменной $t - x = s$, получаем для произвольного $N > 0$, что

$$\sigma_R(f,x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+s) \frac{\sin Rs}{s}\, ds = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^{N} (f(x+s) - f(x)) \frac{\sin Rs}{s}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^{N} f(x) \frac{\sin Rs}{s}\, ds + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|s|>N} f(x+s) \frac{\sin Rs}{s}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^{N} \frac{f(x+s) - f(x)}{s} \sin Rs\, ds +$$

$$+ f(x) \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^{N} \frac{\sin Rs}{s}\, ds + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|s|>N} \frac{f(x+s)}{s} \sin Rs\, ds.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равенством $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dx = \pi$, зафиксируем столь большое N, что

$$\left| f(x) \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^{N} \frac{\sin Rs}{s}\, ds - f(x) \right| = \left| f(x) \frac{1}{\pi} \int\limits_{-RN}^{RN} \frac{\sin s}{s}\, ds - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $R > 1$. Заметим, что функция $g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ интегрируема по Лебегу на $[-N, N]$. Действительно, она интегрируема в δ-окрестности точки $t = 0$ в силу условия

Дини, и интегрируема вне нее, так как мажорируется интегрируемой функцией $\frac{1}{\delta}(|f(x+t)|+|f(x)|)$. Тогда в силу следствия из теоремы 14.1 имеем

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}\frac{f(x+s)-f(x)}{s}\sin Rs\,ds=0.$$

Точно так же в силу интегрируемости функции $h(t)=\frac{f(x+t)}{t}$ на множестве $\{|t|>N\}$ имеем

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|s|>N}\frac{f(x+s)}{s}\sin Rs\,ds=0.$$

Соединяя эти равенства, видим, что

$$|f(x)-\sigma_R(f,x)|<\varepsilon$$

при достаточно больших R. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что если $f\in L_1(\mathbb{R})$, то условие Дини выполнено в любой точке, где f дифференцируема.

Из теоремы Дини выведем свойство единственности для преобразования Фурье в $L_1(\mathbb{R})$.

Теорема 14.3. *Пусть $f\in L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f}(\xi)\equiv 0$. Тогда $f(x)=0$ почти всюду на $\mathbb{R}$.*

Доказательство.

Для фиксированного $y\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=\int\limits_{0}^{y}f(x+t)\,dt=\int\limits_{x}^{x+y}f(t)\,dt.$$

По теоремам Тонелли и Фубини (для определенности берем $y>0$)

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|\varphi(x)|\,dx\leqslant\int\limits_{R}\int\limits_{0}^{y}|f(x+t)|\,dt\,dx=\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x+t)|dx\,dt=y\|f\|_1<\infty,$$

то есть $\varphi\in L_1(\mathbb{R})$. В силу второго равенства φ абсолютно непрерывна, то есть почти всюду имеет производную (следствие из леммы 13.2), то есть почти всюду удовлетворяет условию Дини. А в силу первого равенства и теоремы Фубини для любого ξ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx=\int\limits_{R}\int\limits_{0}^{y}f(x+t)\,dt\,e^{-ix\xi}dx=\int\limits_{0}^{y}e^{it\xi}\int\limits_{\mathbb{R}}f(x+t)\,e^{-i(x+t)\xi}dx\,dt=0.$$

По теореме 14.2 функция φ равна нулю почти всюду, а тогда в силу своей непрерывности она равна нулю всюду, в частности, $\varphi(0)=0$. Теперь, меняя y, получаем, что

$$\int\limits_{0}^{y}f(t)\,dt=0$$

для всех y, то есть $f(t)=0$ почти всюду по свойствам неопределенного интеграла Лебега (теорема 13.1). Теорема доказана.

Можно найти и другие условия, при которых справедлива формула обращения. Но этого обычно не делают, поскольку (для функций одной переменной) имеет место общее утверждение — теорема о равносходимости, позволяющее использовать давно изученные признаки сходимости рядов Фурье.

Важным свойством преобразования Фурье, позволяющим широко использовать его в теории дифференциальных уравнений, являются формулы, связывающие преобразование Фурье и производную.

Теорема 14.4. *Пусть функция f абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке в $\mathbb{R}$, и обе функции f и f' интегрируемы по Лебегу на $\mathbb{R}$. Тогда $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$.*

Доказательство.

Согласно определению,
$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx.$$
Поскольку функция f непрерывна и интегрируема на $\mathbb{R}$, то найдется такая последовательность $R_k \to +\infty$, что $f(\pm R_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Представим интеграл как предел интегралов по отрезкам $[-R_k, R_k]$ и воспользуемся формулой интегрирования по частям (теоремой 13.3):
$$\widehat{f'}(\xi) = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-R_k}^{R_k} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{k\to+\infty}(f(x)e^{-ix\xi})|_{-R_k}^{R_k} -$$
$$-\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-R_k}^{R_k} f(x)\frac{\partial}{\partial x}e^{-ix\xi}\,dx = i\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx.$$
Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция f дифференцируема $(k-1)$ раз всюду на прямой, ее $(k-1)$-я производная абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке в $\mathbb{R}$, и все функции f, f', ..., $f^{(k)}$ интегрируемы по Лебегу на $\mathbb{R}$. Тогда*

(i) $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k\widehat{f}(\xi)$.

(ii) $\widehat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$ при $|\xi| \to \infty$.

Доказательство.

Первое утверждение следствия получается из теоремы по индукции. Второе вытекает из первого и теоремы 14.1, поскольку $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$ как преобразование Фурье интегрируемой функции.

Теорема 14.5. *(i) Пусть функции $f(x)$ и $xf(x)$ интегрируемы по Лебегу на $\mathbb{R}$. Тогда функция $\widehat{f}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и*
$$(\widehat{f})'(\xi) = -i\widehat{xf}(\xi).$$
(ii) Пусть для некоторого $a > 0$ функция f удовлетворяет условию $f(x)e^{a|x|} \in L(\mathbb{R})$. Тогда преобразование Фурье функции f может быть голоморфно продолжено в полосу комплексной плоскости $\{z : |\operatorname{Im} z| < a\}$.

Доказательство.
(i) Рассмотрим функцию $\varphi(x,\xi) = f(x)e^{-ix\xi}$. Поскольку $|e^{-ix\xi}| = 1$ при вещественных x и ξ, то φ удовлетворяет условиям пункта (i) теоремы 13.4 на $\mathbb{R}^2$ с мажорантой $g(x) = |xf(x)|$ в каждой точке $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Применяя теорему 13.4(i), получаем, что

$$(\widehat{f})'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)e^{-ix\xi}\,dx = -i\widehat{xf}(\xi).$$

(ii) Пусть $\xi = \zeta + i\eta$ — комплексный параметр. Рассмотрим функцию $\varphi(x,\xi) = f(x)e^{-ix\xi}$, и функцию

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

в полосе $\{z \,:\, |\operatorname{Im} z| < a\}$. Поскольку $|e^{-ix\xi}| = e^{x\eta} \leqslant e^{a|x|}$ при вещественных x и при $|\eta| < a$, то φ удовлетворяет условиям пункта (ii) теоремы 13.4 на $\mathbb{R} \times \{z \,:\, |\operatorname{Im} z| < a\}$ с мажорантой $g(x) = e^{a|x|} \cdot |f(x)|$ в каждой точке ξ_0, $|\operatorname{Im} \xi_0| < a$.

Из этой же оценки следует, что интеграл, определяющий F, сходится в указанной полосе; при вещественном ξ он по определению равен $\widehat{f}(\xi)$. Применяя теорему 13.4 (ii), получаем, что

$$F'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)e^{-ix\xi}\,dx$$

существует при всех ξ из полосы.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функции $x^j f(x)$, $j = 0, \ldots, k$, интегрируемы по Лебегу на $\mathbb{R}$. Тогда функция $\widehat{f}$ дифференцируема j раз на $\mathbb{R}$ и $(\widehat{f})^{(j)}(\xi) = (-i)^j \widehat{x^j f}(\xi)$. Если же для некоторого $a > 0$ функция f удовлетворяет условию $f(x)e^{a|x|} \in L(\mathbb{R})$, то эти же формулы справедливы в полосе $\{z \,:\, |\operatorname{Im} z| < a\}$ для комплексных производных голомофорного продолжения её преобразования Фурье.*

Следствие получается из теоремы по индукции.

Следствия из теорем 14.4 и 14.5 показывают, что чем выше гладкость функции, тем быстрее убывает её преобразование Фурье, а чем быстрее убывает функция, тем выше гладкость её преобразования Фурье.