Лекция 14 по функциональному анализу 30 ноября 2020 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 12: Функции ограниченной вариации

Лемма 12.1. *Функция $f(x) \in BV([a,b])$ непрерывна слева (справа) в точке x тогда и только тогда, когда функция $f_1(x) = V_a^x f$ непрерывна слева (справа) в этой точке.*

Доказательство.

Рассмотрим для определенности поведение функции справа от точки.

Так как $|f(x+t)-f(x)| \leqslant V_x^{x+t} f$, то из непрерывности f_1 следует непрерывность f. Пусть теперь f непрерывна справа. Предположим, что f_1 разрывна. В силу ее монотонности это означает, что существует

$$\lim_{t\to+0} f_1(x+t) = f_1(x+0) = f_1(x) + \varepsilon, \qquad \text{где } \varepsilon > 0.$$

Выберем такое $h > 0$, что $f_1(x+h) - f_1(x) = V_x^{x+h} f < \frac{5}{4}\varepsilon$. Выберем такое разбиение $T = \{x_k\}$ отрезка $[x, x+h]$, что $V_T(f) > \frac{7}{8}\varepsilon$. Добавляя к T, если нужно, еще одну точку, достаточно близкую к $x = x_0$, можно считать в силу непрерывности f, что $|f(x_1) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$, а тогда

$$\sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| > V_T(f) - |f(x_1) - f(x_0)| > \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Так как по предположению $V_x^{x_1} f \geqslant \varepsilon$, то найдется такое разбиение T' отрезка $[x, x_1]$: $x = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = x_1$, что $V_{T'}(f) > \frac{3\varepsilon}{4}$. Тогда $T \cup T'$ есть разбиение отрезка $[x, x+h]$, причем

$$V_{T\cup T'}(f) = \sum_{j=1}^{m} |f(y_j) - f(y_{j-1})| + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{2},$$

что противоречит выбору h. Следовательно, f_1 не может быть разрывной при непрерывной f. Лемма доказана.

Интеграл Римана—Стилтьеса и Лебега — Стилтьеса

Определение. Пусть f и φ — две функции на отрезке $[a,b]$, а $T = \{x_k, \xi_k\}$ — размеченное разбиение этого отрезка. Тогда интегральной суммой Римана — Стилтьеса называется величина

$$S_T(f, d\varphi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})).$$

Если существует предел интегральных сумм при измельчении разбиения, то он называется интегралом Римана — Стилтьеса и обозначается

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) \text{ или } (RS)\int_a^b f(x)\, d\varphi(x),$$

а функция f называется интегрируемой по Риману — Стилтьесу по φ на отрезке.

Отметим простейшие свойства интеграла Римана —- Стилтьеса.

1. Линейность по f.

2. Линейность по φ.

Оба свойства следуют из линейности интегральных сумм по каждой из функций и линейности предела.

3. При $\varphi(x) = x$ совпадает с обычным интегралом Римана.

Для того, чтобы класс функций f оказался достаточно широким, в качестве функции φ следует брать, как мы увидим ниже, функцию ограниченной вариации.

Пусть φ — неубывающая непрерывная слева функция на $[A, B]$. Тогда на полукольце полуинтервалов, вложенных в $[A, B]$, можно определить меру Стилтьеса:

$$m_\varphi[a, b) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Мера Стилтьеса является σ-аддитивной мерой (см. семинары). Продолжение этой меры по Лебегу называется мерой Лебега — Стилтьеса, мы будем обозначать его через μ_φ. Интеграл по такой мере иногда называют интегралом Лебега — Стилтьеса, хотя с формальной точки зрения это обычный интеграл Лебега для некоторых мер.

Теорема 12.1. *Пусть φ — неубывающая непрерывная слева функция на $[a, b]$, а функция f ограничена на $[a, b]$ и непрерывна μ_φ-почти всюду на $[a, b)$. Тогда существует интеграл Римана — Стилтьеса от f по φ, причем*

$$(RS) \int_a^b f(x) d\varphi(x) = (L) \int_{[a,b)} f(x)\, d\mu_\varphi.$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольную последовательность размеченных разбиений отрезка с диаметрами, стремящимися к нулю: $T^m = \{x_k^m, \xi_k^m\}$. Положим

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m) \chi_{[x_{k-1}^m, x_k^m)}(x).$$

Тогда

$$S_{T^m}(f, d\varphi) = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)(\varphi(x_k^m) - \varphi(x_{k-1}^m)) = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m) \mu_\varphi[x_{k-1}^m, x_k^m) = (L) \int_{[a,b)} f_m(x)\, d\mu_\varphi.$$

Заметим, что $f_m(x) - f(x) = f(\xi_k^m) - f(x)$, где $|x - \xi_k^m|$ не превосходит диаметра разбиения T^m. Поэтому в каждой точке непрерывности функции f выполняется условие $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$. Если $|f(x)| \leqslant C$, то и $|f_m(x)| \leqslant C$. Но $\mu_\varphi([a, b)) < \infty$. Поэтому если функция f непрерывна почти всюду, то применима теорема Лебега о предельном переходе с мажорантой $g(x) \equiv C$, то есть

$$\lim_{m\to\infty} S_{T^m}(f, d\varphi) = \lim_{m\to\infty} (L) \int_{[a,b)} f_m(x)\, d\mu_\varphi = (L) \int_{[a,b)} f(x)\, d\mu_\varphi.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\varphi \in BV([a,b])$ — непрерывная слева функция, а f — непрерывная функция на $[a,b]$. Тогда существует интеграл Римана — Стилтьеса.*

Доказательство.
Согласно свойству 6 существует разложение функции φ в разность двух неубывающих функций, причем в силу леммы 12.1 эти функции можно считать также непрерывными слева. По теореме 12.1 существуют интегралы Римана — Стилтьеса

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi_1(x) \text{ и } \int\limits_a^b f(x)\,d\varphi_2(x).$$

В силу линейности интеграла Римана — Стилтьеса существует и интеграл по φ.

Замечание. Можно показать, что условие непрерывности слева функции φ в следствии излишне (при непрерывных f).

Класс функций ограниченной вариации и связанные с ними более узкие классы функций имеют и другие взаимосвязи с теорией интеграла Лебега. В основе их лежит следующее весьма нетривиальное утверждение.

Теорема 12.2 (без доказательства). *Монотонная на отрезке функция дифференцируема почти всюду на этом отрезке.*

Из этой теоремы уже относительно несложно выводится

Теорема 12.3. *Пусть $f(x)$ — неубывающая функция на отрезке $[a,b]$. Тогда $f'(x) \in L([a,b])$ и*

$$\int\limits_{[a,b]} f'(x)\,d\mu \leqslant f(b) - f(a).$$

Доказательство.
Доопределим функцию f, полагая $f(x) = f(b)$ при $x > b$. Рассмотрим функции

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

Они неотрицательны, так как f не убывает, и сходятся к $f'(x)$ в каждой точке существования производной ($x \neq b$), то есть, согласно теореме 12.2, почти всюду. Заметим, что

$$\int\limits_{[a,b]} f_n(x)\,d\mu = n\left(\int\limits_{[a+\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\mu - \int\limits_{[a,b]} f(x)\,d\mu\right) =$$

$$= n\int\limits_{[b,b+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\mu - n\int\limits_{[a,a+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\mu \leqslant f(b) - f(a).$$

Тогда по теореме Фату $f'(x) \in L([a,b])$ и

$$\int\limits_{[a,b]} f'(x)\,d\mu \leqslant f(b) - f(a).$$

Следствие. *Если функция имеет ограниченную вариацию на отрезке, то она дифференцируема п.в. на этом отрезке, а ее производная интегрируема по Лебегу относительно классической меры.*

Утверждение немедленно следует из предыдущих теорем и свойства 6 функций ограниченной вариации.

Тема 13: Абсолютно непрерывные функции

Естественно возникает вопрос: для каких функций в теореме 12.3 можно утверждать равенство?

Определение. Функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой системы попарно непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}$ из этого отрезка с $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$ выполнено условие $\sum\limits_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Лемма 13.1. *Если $f(x) \in L([a, b])$, то функция*

$$F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(x)\, d\mu$$

является абсолютно непрерывной на $[a, b]$.

Доказательство.
Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется такое $\delta > 0$, что если $\mu E < \delta$, то

$$\int\limits_E |f(x)|\, d\mu < \varepsilon.$$

Если теперь $\{(a_k, b_k)\}$ — система попарно непересекающихся интервалов из $[a, b]$ с $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$, то

$$\sum_k |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_k \left| \int\limits_{[a_k,b_k]} f(x)\, d\mu \right| \leqslant \sum_k \int\limits_{[a_k,b_k]} |f(x)|\, d\mu = \int\limits_{\bigsqcup_k [a_k,b_k]} |f(x)|\, d\mu < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 13.2. *Абсолютно непрерывная функция на отрезке имеет на этом отрезке ограниченную вариацию.*

Доказательство.
По определению абсолютной непрерывности, существует такое $\delta > 0$, что если $\{(a_k, b_k)\}$ — попарно непересекающиеся интервалы с суммой длин, не превосходящей δ, то $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant 1$. Тогда для любого $\xi \leqslant \delta$ и для любого $c \in [a, b - \xi]$ выполнена оценка $V_c^{c+\xi}(f) \leqslant 1$. Разбивая отрезок $[a, b]$ на конечное число подотрезков длины, не большей δ, получим, что вариация f, равная сумме вариаций по этим подотрезкам, конечна.

Следствие. *Абсолютно непрерывная на отрезке функция дифференцируема почти всюду на этом отрезке, и ее производная является интегрируемой по Лебегу функцией на этом отрезке.*

Основные факты про неопределенный интеграл Лебега приведём без доказательства.

Теорема 13.1 (без доказательства). *Пусть $f \in L([a,b])$ и*

$$\Phi(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t)\, d\mu(t).$$

Тогда $\Phi'(x) = f(x)$ почти всюду.

Теорема 13.2 (без доказательства). *Функция $f \in AC([a,b])$ является неопределенным интегралом Лебега своей производной, т.е. для $x \in [a,b]$ справедлива формула Ньютона — Лейбница*

$$f(x) = \int\limits_{[a,x]} f'(t)\, d\mu(t).$$

Теорема 13.3 (формула интегрирования по частям). *Если F и G абсолютно непрерывны на отрезке $[a,b]$, μ — классическая мера Лебега, то*

$$\int\limits_a^b F(x)G'(x)\, d\mu = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int\limits_a^b F'(x)G(x)\, d\mu.$$

Доказательство.

Проверим, что произведение двух абсолютно непрерывных функций есть абсолютно непрерывная функция. Для произвольного интервала (α,β) имеет место равенство

$$F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha) = (F(\beta) - F(\alpha))G(\beta) + (G(\beta) - G(\alpha))F(\alpha).$$

Если задана система интервалов $\{(a_k,b_k)\}$, то положим $\Delta\varphi_k = \varphi(b_k) - \varphi(a_k)$ — приращение функции φ на k-м интервале. Поскольку абсолютно непрерывная функция, как и любая непрерывная функция, ограничена на отрезке $[a,b]$, то

$$\sum_k |\Delta(FG)_k| \leqslant \max|G| \sum_k |\Delta F_k| + \max|F| \sum_k |\Delta G_k|.$$

Выбирая $\delta > 0$ так, чтобы при $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ выполнялись бы оценки

$$\sum_k |\Delta F_k| < \frac{\varepsilon}{2(1+\max|G|)} \text{ и } \sum_k |\Delta G_k| < \frac{\varepsilon}{2(1+\max|F|)},$$

получим, что $\sum_k |\Delta(FG)_k| < \varepsilon$.

Теперь применим к абсолютно непрерывной функции FG теорему 11.3 (формулу Ньютона — Лейбница):

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int\limits_a^b (F(x)G(x))'\, d\mu$$

Но в каждой точке, где F и G дифференцируемы, $(FG)' = FG' + F'G$. Подставим это равенство в интеграл и воспользуемся линейностью интеграла. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании интеграла Лебега по параметру.

Теорема 13.4. *Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой.*

(i) Пусть Y — интервал на вещественной оси, $\varphi(x, y)$ — функция на $X \times Y$, интегрируемая по Лебегу на X при каждом фиксированном y и непрерывно дифференцируемая на Y при каждом фиксированном x. Если к тому же для $y_0 \in Y$ существуют такие $g(x) \in L(X)$ и $\delta > 0$, что $|\varphi'_y(x, y)| \leqslant g(x)$ при почти всех $x \in X$ и при всех таких y, что $|y - y_0| < \delta$, то существует

$$\frac{d}{dy} \int\limits_X \varphi(x, y) d\mu(x)\Big|_{y=y_0} = \int\limits_X \varphi'_y(x, y_0) d\mu(x).$$

(ii) Пусть Y — область в комплексной плоскости, $\varphi(x, z)$ — функция на $X \times Y$, интегрируемая по Лебегу на X при каждом фиксированном z и голоморфная на Y при каждом фиксированном x. Если к тому же существует такая $g(x) \in L(X)$, что $|\varphi'_z(x, z)| \leqslant g(x)$ при (почти) всех $x \in X$ и при всех z, $|z - z_0| < \delta$, при некотором $\delta > 0$, то для точки $z_0 \in Y$ существует

$$\frac{d}{dz} \int\limits_X \varphi(x, z) d\mu(x)\Big|_{z=z_0} = \int\limits_X \varphi'_z(x, z_0) d\mu(x).$$

Доказательство.

Оба утверждения доказываются практически одинаково, докажем, например, первое. Рассмотрим произвольную последовательность точек $y_n = y_0 + \Delta y_n \to y_0$, где $|\Delta y_n| < \delta$. Тогда для функции

$$F(y) = \int\limits_X \varphi(x, y) d\mu(x)$$

имеем

$$\frac{F(y_n) - F(y_0)}{\Delta y_n} = \int\limits_X \frac{\varphi(x, y_n) - \varphi(x, y_0)}{\Delta y_n} d\mu(x).$$

При каждом фиксированном $x \in X$ подынтегральные функции сходятся к $\varphi'_y(x, y_0)$ при $n \to \infty$. Проверим, что g является мажорантой подынтегральных функций; тогда по теореме Лебега можно будет осуществить предельный переход. Действительно, при каждом x по формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\varphi(x, y_n) - \varphi(x, y_0) = \int\limits_{y_0}^{y_n} \varphi'_y(x, t)\, dt,$$

откуда

$$|\varphi(x, y_n) - \varphi(x, y_0)| \leqslant |y_n - y_0| \max_y |\varphi'_y(x, y)| \leqslant |\Delta y_n| g(x).$$

Теорема доказана.