Лекция 13 по функциональному анализу 23 ноября 2020 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 11 : Пространства L_p (продолжение).

Наряду с пространствами L_p определяется также пространство существенно ограниченных функций L_∞.

Определение. Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой. Положим

$$\widehat{L}_\infty(X) = \{f \,:\, f(x) \text{ измерима}, \ \exists\, g \sim f \,:\, g \text{ ограничена}\},$$
$$L^0(X) = \{f \,:\, f(x) \text{ измерима}, \ f \sim 0\}.$$

Тогда пространством $L_\infty(X) = L_\infty(X, M, \mu)$ называется $\widehat{L}_\infty(X)/L^0(X)$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \inf_{g\sim f} \sup_{x\in X} |g(x)|.$$

Лемма 11.3. *Для любой функции (класса эквивалентности) $f \in L_\infty(X)$*

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \,:\, \mu\{x \,:\, |f(x)| > c\} = 0\}.$$

Доказательство.
Если $\mu\{x \,:\, |f(x)| > c\} = 0$, то можно переопределить функцию на множестве меры нуль так, чтобы она не превосходила c по модулю. Поэтому точная верхняя грань из определения не больше, чем точная верхняя грань из формулировки. Обратно, если некоторая функция $g \sim f$ ограничена по модулю величиной c, то f может превосходить c лишь на множестве меры нуль. Лемма доказана.

Полнота пространств L_p.

Напомним, что последовательность точек $\{x_n\}$ нормированного пространства E называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n, m > N$ выполняется неравенство $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Нормированное пространство называется полным (банаховым), если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Доказательство полноты пространств $L_p(X, M, \mu)$ разобьем на несколько этапов.

Лемма 11.4. *Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ фундаментальна в пространстве $L_1(X)$. Тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящаяся п.в. на X.*

Доказательство.
По индукции построим такую строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$, что для любого $n > n_k$ выполнено неравенство

$$\|f_{n_k} - f_n\|_1 = \int\limits_X |f_{n_k}(x) - f_n(x)|\, d\mu < \frac{1}{2^k}$$

(это можно сделать в силу фундаментальности). В частности, тогда $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_1 < \frac{1}{2^k}$. Положим

$$g_m(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{m-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Тогда $0 \leqslant g_m(x) \leqslant g_{m+1}(x)$ и при каждом m

$$\int\limits_X g_m(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_X |f_{n_1}(x)|\,d\mu + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^k} \leqslant \int\limits_X |f_{n_1}(x)|\,d\mu + 1.$$

По теореме Б. Леви последовательность $\{g_m(x)\}$ сходится почти всюду к конечному пределу. Тогда сходится почти всюду и ряд

$$|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|,$$

частичными суммами которого являются g_m, а тем более — ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)),$$

частичными суммами которого являются f_{n_m}. Лемма доказана.

Лемма 11.5. *Пусть $\mu X < \infty$ и $p > 1$. Тогда $L_p(X) \subseteq L_1(X)$, причем найдется такое C, что для любой $f \in L_p(X)$ выполнена оценка $\|f\|_1 \leqslant C\|f\|_p$.*

Доказательство.

Возьмем $q = \frac{p}{p-1}$. Тогда, применяя неравенство Гельдера к функции $|f|$ и тождественной единице, получим, что

$$\int\limits_X |f(x)|\,d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_X 1^q\,d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p(\mu X)^{1/q}.$$

Лемма доказана.

Теорема 11.3. *Пусть (X, M, μ) — пространство с полной мерой, и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда пространство $L_p(X, M, \mu)$ полно.*

Доказательство.

Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $L_p(X, M, \mu)$.

Докажем вначале, что найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся почти всюду. При $p = 1$ это доказано в лемме 11.4. Пусть $p > 1$ и $\mu X < \infty$. Тогда по лемме 11.5 последовательность является фундаментальной и в $L_1(X)$, а тогда по лемме 11.4 существует подпоследовательность, сходящаяся почти всюду.

Пусть, наконец, $p > 1$ и $\mu X = \infty$. Возьмем представление $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $\mu A_k < \infty$. Поскольку для любой неотрицательной функции g при всех k выполнено неравенство

$$\int\limits_{A_k} g(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_X g(x)\,d\mu,$$

то последовательность $\{f_n\}$ (и любая ее подпоследовательность) будет фундаментальна в каждом пространстве $L_p(A_k)$. По доказанному можно выбрать такую подпоследовательность $\{n_k^1\}$, что $\{f_{n_k^1}\}$ сходится п.в. на A_1. Из нее можно выбрать такую подпоследовательность $\{n_k^2\}$, что $\{f_{n_k^2}\}$ сходится п.в. и на A_2, и так далее по индукции. Диагональная подпоследовательность $\{f_{n_k^k}\}$ будет сходиться почти всюду на X (всюду, кроме счетного объединения множеств меры нуль).

Итак, мы нашли подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая сходится почти всюду. Но она фундаментальна в L_p, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер K, что при всех $k, m > K$ выполнено неравенство

$$\int\limits_X |f_{n_k}(x) - f_{n_m}(x)|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon^p.$$

Зафиксируем k и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Подынтегральные функции неотрицательны и почти всюду сходятся к $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p$. По теореме Фату (теорема 8.3) получаем, что $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \in L(X)$ и при всех $k > K$ выполнено неравенство

$$\int\limits_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon^p.$$

Таким образом, $f_{n_k} - f \in L_p$ (а тогда и $f \in L_p$ по неравенству Минковского), и $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$ при $k \to \infty$. По лемме 1.2 отсюда следует, что $\|f_n - f\|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Пример: Пусть $X = \mathbb{N}$, M — σ-алгебра всех подмножеств $\mathbb{N}$, а мера множества равна числу его элементов (конечному числу или бесконечности). Такую меру ν иногда называют «считающей». Она σ-аддитивна, как частный случай дискретной меры, и σ-конечна, поскольку всё множество $\mathbb{N}$ представляется как счетное объединение одноточечных, мера которых конечна.

Выясним, исходя из общих определений, как устроен интеграл по этой мере. Поскольку M состоит из всех подмножеств единицы, то любая функция (т.е. последовательность) будет измеримой. Так как единственным множеством меры нуль будет пустое, то мера полна, а пар различных, но эквивалентных друг другу функций не существует. Поскольку простая функция отлична от нуля лишь на множестве конечной меры, то любая простая последовательность будет финитной; обратно, любая финитная последовательность принимает лишь конечное число значений и потому является простой функцией. Если это последовательность $\mathbf{x}^n = \{x_1, \ldots, x_n, 0 \ldots, \}$, то по определению интеграла от простой функции

$$\int\limits_{\mathbb{N}} \mathbf{x}^n \, d\nu = \sum_{k=1}^{n} x_k \nu\{k\} = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Далее, для любой неотрицательной последовательности $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементы $\mathbf{x}^n = (x_1, \ldots, x_n, 0 \ldots)$ поточечно монотонно сходятся к ней. По лемме 7.7 имеем

$$\int\limits_{\mathbb{N}} \mathbf{x} \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} \mathbf{x}^n \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Таким, образом, для знакопеременной (а отсюда, и для комплекснозначной) последовательности $\mathbf{x}$ выполнено следующее свойство: $\mathbf{x} \in L(\mathbb{N}, M, \nu)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty,$$

и в случае интегрируемости

$$\int_{\mathbb{N}} \mathbf{x}\, d\nu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Применяя к этому пространству с мерой предыдущие результаты темы 11, получаем неравенства Гёльдера и Минковского для последовательностей, а также равенство $l_p = L_p(\mathbb{N}, M, \nu)$, из которого, в частности, следует полнота пространства l_p.

Рассмотрим ещё вопрос о сепарабельности $L_p(X, M, \mu)$.

Определение. Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой. Система $K \subset M$ называется базисом меры, если для любого $A \in M$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B \in K$, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

Например, сравнивая это определение с определением измеримого множества, получаем, что для системы измеримых по Лебегу множеств в случае $mX < \infty$ кольцо $R(S)$ будет базисом меры.

Теорема 7.4. *Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой, $1 \leqslant p < \infty$. Если существует не более чем счетный (по мощности) базис меры K, то пространство $L_p(X, M, \mu)$ сепарабельно.*

Доказательство.

Пусть $f \in L_p(X, M, \mu)$. По лемме Д.1 существуют такие простые функции $\{g_k\}$, что $g_k \to f$ всюду, причем они строились таким образом, что $|f(x) - g_k(x)| \leqslant |f(x)|$. Возводя это неравенство в степень p, получаем, что можно взять $|f(x)|^p$ за (интегрируемую) мажоранту для функций $|f(x) - g_k(x)|^p \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \int_X |f(x) - g_k(x)|^p\, d\mu = 0,$$

то есть для любой $f \in L_p(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая простая g, что $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Итак, простые функции всюду плотны в L_p.

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{P}$ функций вида

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{H_k}(x),$$

где $H_k \in K$, а $b_k \in \mathbb{Q}$ (в комплексном случае — $\operatorname{Re} b_k \in \mathbb{Q}$ и $\operatorname{Im} b_k \in \mathbb{Q}$). Множество таких функций счетно по построению. Для функции $h \in \mathcal{P}$ и простой функции $g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$ с тем же n в силу неравенства Минковского будем иметь:

$$\|g - h\|_p \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{E_k}(x) \right\|_p + \left\| \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{E_k}(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{H_k}(x) \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \|\chi_{E_k}\|_p + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \|\chi_{E_k} - \chi_{H_k}\|_p = \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| (\mu E_k)^{1/p} + \sum_{k=1}^{n} |b_k| (\mu(E_k \triangle H_k))^{1/p}.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} (\mu E_k)^{1/p} = C(g) < \infty \text{ и } \sup_k |a_k| = C(g) < \infty.$$

Но для любого $\delta > 0$ и для каждого $k = 1, \ldots, n$ можно выбрать рациональные b_k так, чтобы $|b_k| \leqslant |a_k|$ и при этом $|b_k - a_k| < \delta$ (в силу плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$), а с другой стороны, можно выбрать $H_k \in K$ так, чтобы $(\mu(E_k \triangle H_k))^{1/p} < \delta$. При достаточно малом δ получим отсюда оценку $\|g - h\|_p < \varepsilon$. Итак, счетное множество $\mathcal{P}$ всюду плотно в $L_p(X)$.

Тема 12: Функции ограниченной вариации

Определение. Пусть $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Положим $V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Вариацией функции f на отрезке $[a, b]$ называется

$$V_a^b f = \sup_T V_T(f).$$

Если вариация функции f конечна, то f называется функцией ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ (обозначается $f \in BV([a, b])$).

Перечислим **элементарные свойства функций ограниченной вариации**.

1. Функция ограниченной вариации ограничена.

Действительно, если $x \in (a, b)$, то разбиение $T(x) = \{a < x < b\}$ из трех точек даёт оценку

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leqslant V_{T(x)}(f) + |f(a)| \leqslant V_a^b f + |f(a)|.$$

2. Монотонная функция имеет ограниченную вариацию.

Для монотонной функции f и любого разбиения T имеем

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \left| \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \right| = |f(b) - f(a)|.$$

3. Линейная комбинация функций ограниченной вариации является функцией ограниченной вариации.

Свойство сразу следует из оценки $V_T(f + g) \leqslant V_T(f) + V_T(g)$, в которой можно перейти к супремуму по разбиениям.

4. Если $f \in BV([a, b])$ и $c \in (a, b)$, то $f \in BV([a, c])$, $f \in BV([c, b])$ и $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$.

Действительно, всякое разбиение T отрезка $[a, c]$ можно дополнить до разбиения отрезка $[a, b]$, например, одной точкой b. Поэтому $V_T(f) \leqslant V_a^b f$, и при переходе к верхней грани получаем, что $f \in BV([a, c])$. Аналогично $f \in BV([c, b])$. Далее, если T_1 — разбиение отрезка $[a, c]$, а T_2 — разбиение отрезка $[c, b]$, то $T = T_1 \cup T_2$ — разбиение отрезка $[a, b]$, причем

$$V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) = V_T(f) \leqslant V_a^b f.$$

Переходя к верхней грани по T_1, а затем по T_2, получим, что

$$V_a^c f + V_c^b f \leqslant V_a^b f.$$

Выберем такое разбиение T отрезка $[a,b]$, что $V_T(f) > V_a^b f - \varepsilon$. Можно считать, что $c \in T$, поскольку при добавлении точки вариационная сумма может лишь увеличиться. Тогда $T = T_1 \cup T_2$, где T_1 и T_2 — разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно, и

$$V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) = V_T(f) > V_a^b f - \varepsilon.$$

Тем более

$$V_a^c f + V_c^b f > V_a^b f - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то свойство тем самым доказано.

5. Если $c \in (a,b)$, $f \in BV([a,c])$ и $f \in BV([c,b])$, то $f \in BV([a,b])$.

Действительно, возьмем разбиение T отрезка $[a,b]$. Можно считать, что $c \in T$, поскольку при добавлении точки вариационная сумма может лишь увеличиться. Тогда $T = T_1 \cup T_2$, где T_1 и T_2 — разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно, и

$$V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f).$$

Поэтому

$$V_T(f) \leqslant V_a^c f + V_c^b f,$$

и можно перейти к верхней грани.

6. Функция f является функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде разности двух неубывающих функций. При этом можно взять $f_1(x) = V_a^x f$, $f_2(x) = V_a^x f - f(x)$.

Разность двух монотонных функций является BV-функцией в силу свойств 2 и 3. Обратно, пусть $f \in BV([a,b])$. Рассмотрим функции $f_1(x) = V_a^x f$ и $f_2(x) = V_a^x f - f(x)$. Тогда $f = f_1 - f_2$. В то же время, если $x < y$, то по свойству 4

$$f_1(y) - f_1(x) = V_x^y f \geqslant 0, \qquad f_2(y) - f_2(x) = V_x^y - (f(y) - f(x)) \geqslant 0.$$

7. Функция ограниченной вариации имеет не более чем счетное множество точек разрыва, и все они — либо устранимые, либо первого рода.

Действительно, этим свойством обладает любая монотонная функция, а тогда по свойству 6 — и любая BV-функция.