Лекция 12 по функциональному анализу 16 ноября 2020 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 10 : Заряды (продолжение).

Лемма 10.2. *Если A — не положительное, то существует отрицательное $B \subset A$ такое, что $\Phi(B) < 0$.*

Доказательство.

Предположим противное. Так как A не положительно, то найдется такое измеримое $C_0 \subseteq A$, что $\Phi(C_0) < 0$. Так как C_0 не отрицательно, то найдется $C_1 \subseteq C_0$ с положительным зарядом, причем его можно выбрать так, что $\Phi(C_1) \geqslant \frac{1}{k_1}$, а для $\frac{1}{k_1-1}$ такое множество выбрать уже нельзя, т.е. k_1 — минимально возможное. Так как $\Phi(C_0 \setminus C_1) < 0$, то можно повторить эту процедуру и выбрать такое $C_2 \subseteq C_0 \setminus C_1$, что $\Phi(C_2) \geqslant \frac{1}{k_2}$, а для $\frac{1}{k_2-1}$ такого C_2 не существует, т.е. k_2 — минимально возможное. Продолжим этот процесс по индукции и положим $F_0 = C_0 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Заметим, что при этом $k_i \to \infty$, так как

$$\sum_i \frac{1}{k_i} \leqslant \sum_i \Phi(C_i) = \Phi\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) < +\infty.$$

Так как $\Phi(C_0) < 0$, а $\Phi(C_i) > 0$ при $i > 0$, то $\Phi(F_0) < 0$. В то же время F_0 отрицательно, так как если нашлось бы $F \subset F_0$ с $\Phi(F) > 0$, то для некоторого n было бы выполнено $\Phi(F) > \frac{1}{n}$, и это бы противоречило выбору k_i (как минимально возможного) при $k_i > n$.

Лемма доказана.

Теорема 10.1. *(Разложение Хана.) Пусть Φ — заряд на M. Тогда существует такое отрицательное множество A_-, что множество $B_+ = X \setminus A_-$ положительно. Представление $X = B_+ \sqcup A_-$ и называется разложением Хана.*

Доказательство.

Пусть $a = \inf \Phi(A)$, где нижняя грань берется по всем отрицательным множествам $A \in M$. Выберем такие отрицательные множества A_n, что $\Phi(A_n) \to a$, и определим $A_- = \bigcup_n A_n$. Тогда по лемме 10.1 A_- отрицательно. В то же время при каждом n имеет место неравенство $\Phi(A_-) = \Phi(A_n) + \Phi(A_- \setminus A_n) \leqslant \Phi(A_n)$, так как $\Phi(A_- \setminus A_n) \leqslant 0$. Следовательно, $\varphi(A_-) = a$, в частности, $a > -\infty$.

Докажем, что множество $B_+ = X \setminus A_-$ положительно. Предположим, что это не так. Тогда по лемме 10.2 найдется отрицательное $C \subseteq B_+$ с $\Phi(C) < 0$. При этом $A_- \sqcup C$ будет отрицательным с $\Phi(A_- \sqcup C) = \Phi(A_-) + \Phi(C) < \Phi(A_-) = a$, что противоречит выбору a. Итак, B_+ положительно. Теорема доказана.

Определение. Пусть Φ — заряд на σ-алгебре M с единицей X. Представление его в виде разности двух конечных σ-аддитивных мер $\Phi = \mu_+ - \mu_-$ называется разложением Жордана, если существует такое множество $B \in M$, что $\mu_-(B) = 0$, $\mu_+(X \setminus B) = 0$.

Каждое разложение Хана $X = B_+ \sqcup A_-$ для заряда определяет разложение Жордана этого заряда по формулам:

$$\Phi(E) = \Phi_+(E) - \Phi_-(E), \qquad \Phi_+(E) = \Phi(E \cap B_+), \quad \Phi_-(E) = -\Phi(E \cap A_-) \qquad (*)$$

(при этом $B = B_+$).

Заряд можно и другими способами представить в виде разности двух мер. С другой стороны, для заряда может существовать более одного разложения Хана, и даже бесконечно много.

Теорема 10.2. *Разложение Жордана для заряда единственно.*

Доказательство.

Докажем сначала, что любое разложение Жордана порождается некоторым разложением Хана по формуле ($*$). Пусть задано разложение Жордана. Положим $B_+ = B$, $A_- = X \setminus B$. Тогда $X = B_+ \sqcup A_-$ — искомое разложение Хана. Действительно, для $E \subset B$ имеем $\Phi(E) = \mu_+E - \mu_-E = \mu_+E \geqslant 0$, т.к. $\mu_-E = 0$, а для $E \subset X \setminus B$ имеем $\Phi(E) = \mu_+E - \mu_-E = -\mu_-E \leqslant 0$, т.к. $\mu_+E = 0$. Итак, по определению B_+ положительно, а A_- отрицательно. При этом для любого E

$\Phi_+(E) = \Phi(E \cap B_+) = \mu_+(E \cap B_+) - \mu_-(E \cap B_+) = \mu_+(E \cap B_+) = \mu_+E - \mu_+(E \cap A_-) = \mu_+E$. т.е. $\Phi_+ = \mu_+$, и аналогично $\Phi_- = \mu_-$.

Пусть теперь есть два разложения Хана:

$$X = A_- \sqcup B_+ = C_- \sqcup D_+.$$

Покажем, что они порождают по формуле ($*$) одно и то же разложение Жордана. Для любого $E \in M$ множество $E \cap (B_+ \setminus D_+)$ вложено, с одной стороны, в положительное множество B_+, а с другой стороны, в отрицательное множество C_-. Следовательно, $\Phi(E \cap (B_+ \setminus D_+)) = 0$. Аналогично $\Phi(E \cap (D_+ \setminus B_+)) = 0$. Поэтому для любого $E \in M$

$$\begin{aligned}\Phi(E \cap B_+) = \Phi(E \cap (B_+ \cap D_+)) + \Phi(E \cap (B_+ \setminus D_+)) = \Phi(E \cap (B_+ \cap D_+)) = \\ = \Phi(E \cap (B_+ \cap D_+)) + \Phi(E \cap (D_+ \setminus B_+)) = \Phi(E \cap D_+).\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\Phi(E \cap A_-) = \Phi(E \cap C_-).$$

Теорема доказана.

Определение. Заряд Φ на σ-алгебре M называется абсолютно непрерывным относительно меры μ на M, если для любого $E \in M$ с $\mu E = 0$ выполнено равенство $\Phi(E) = 0$.

Из свойств интеграла Лебега сразу следует, что если (X, M, μ) — пространство с мерой, $f \in L(X, M, \mu)$, то заряд

$$\Phi(A) = \int\limits_A f(x)\, d\mu$$

абсолютно непрерывен относительно меры μ. Нетривиальным является обратное утверждение, которое мы доказывать не будем.

Теорема 10.3 (Теорема Радона — Никодима, без доказательства. *Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой. Заряд Φ на M абсолютно непрерывен относительно μ тогда и только тогда, когда существует такая функция $f \in L(X, M, \mu)$, что*

$$\Phi(A) \equiv \int\limits_A f(x)\, d\mu.$$

Тема 11 : Пространства L_p.

В этой теме мы рассмотрим пространства интегрируемых функций — одно из важнейших приложений теории интеграла Лебега в теории функций, в собственно функциональном анализе, в теории дифференциальных уравнений и в других разделах математики. Начнем с доказательства двух важных неравенств.

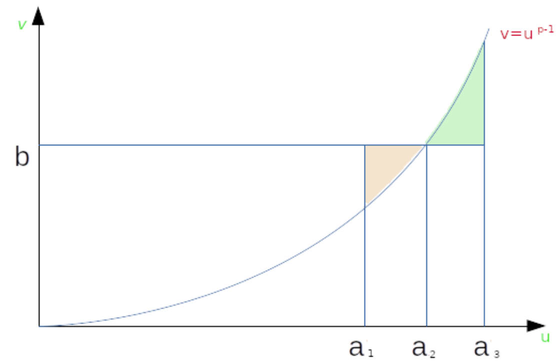
Неравенства Гельдера и Минковского

Лемма 11.1. *(Неравенство Юнга) Пусть числа $p > 1$ и $q > 1$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых $a, b \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказательство.

Заметим, что из $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ следует, что $p + q = pq$, откуда $pq - p - q + 1 = 1$ и $(p-1)(q-1) = 1$. Поэтому график функции $v = u^{p-1}$ является и графиком функции $u = v^{q-1}$, и из геометрических соображений для любых $a, b > 0$ выполнено неравенство



$$ab \leqslant \int_0^a u^{p-1}\, du + \int_0^b v^{q-1}\, dv = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Действительно, первый интеграл есть площадь фигуры между графиком, осью абсцисс и прямой $u = a$, а второй — площадь фигуры между графиком, осью ординат и прямой $v = b$. При $b = a^{p-1}$ (случай $a = a_2$) объединение этих фигур равно прямоугольнику со сторонами a и b. При меньших a (случай $a = a_1$) объединение этих фигур больше прямоугольника (добавляется бежевая фигура), и при больших a (случай $a = a_3$) объединение этих фигур тоже больше прямоугольника (добавляется зеленая фигура).

Лемма 11.2. *Если f — неотрицательная интегрируемая функция и $\int_E f(x)\, d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ п.в. на E.*

Доказательство.

Заметим, что

$$\{x \in E \,:\, f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E \,:\, f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Но по неравенству Чебышёва при каждом n имеем

$$\mu\{x \in E \,:\, f(x) > \frac{1}{n}\} \leqslant n \int_E f(x)\, d\mu = 0.$$

Тогда и счетное объединение этих множеств имеет меру нуль.

Теорема 11.1. *(Неравенство Гельдера.) Пусть задано пространство с мерой (X, M, μ), а числа $p > 1$ и $q > 1$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть f и g – измеримые функции, причем функции $|f|^p$ и $|g|^q$ интегрируемы по Лебегу. Тогда функция fg интегрируема и*

$$\left| \int\limits_X f(x)g(x)\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_X |f(x)g(x)|\, d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g(x)|^q\, d\mu \right)^{1/q}.$$

Доказательство.
В силу теоремы Д.1 можно без ограничения общности считать, что функции f и g принимают вещественные значения.

Если выражение в правой части равно нулю, то по лемме 11.2 это означает, что либо $f(x) = 0$ п.в., либо $g(x) = 0$ п.в. В том и в другом случае $f(x)g(x) = 0$ п.в., и неравенство принимает вид $0 \leqslant 0$. Пусть теперь правая часть неравенства отлична от нуля. Положим

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu \right)^{1/p}, \qquad \|g\|_q = \left(\int\limits_X |g(x)|^q\, d\mu \right)^{1/q}.$$

Определим функции $\varphi(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ и $\psi(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$. По неравенству Юнга для любого x имеем

$$\varphi(x)\psi(x) \leqslant \frac{\varphi^p(x)}{p} + \frac{\psi^q(x)}{q}.$$

Проинтегрируем это неравенство по X и заметим, что

$$\int\limits_X \varphi^p(x)\, d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu = 1$$

и аналогично для функции ψ^q. Таким образом,

$$\int\limits_X \varphi(x)\psi(x)\, d\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Возвращаясь к функциям f и g, получаем, что

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int\limits_X |f(x)g(x)|\, d\mu \leqslant 1,$$

и после домножения получаем неравенство Гельдера. Теорема доказана.

Теорема 11.2. *(Неравенство Минковского.) Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой, $1 \leqslant p < \infty$, f и g – измеримые функции, причем $|f|^p$ и $|g|^p$ — суммируемые функции. Тогда $|f + g|^p$ — суммируемая функция и*

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p\, d\mu \right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\, d\mu \right)^{1/p}.$$

Доказательство.
Поскольку в утверждении участвуют только модули функций, можно без ограничения общности считать функции вещественнозначными.

При $p = 1$ утверждение непосредственно следует из свойств интеграла Лебега (следствие из теоремы 7.2). Пусть $p > 1$. Отметим вначале, что

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Поэтому функция $|f(x) + g(x)|^p$ суммируема. Если она равна нулю п.в., то неравенство Минковского заведомо выполнено. Пусть эта функция не эквивалентна нулю. Заметим, что

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)|^{p-1}|f(x) + g(x)| \leqslant \\ \leqslant |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}.$$

Положим $q = p/(p-1)$, тогда пара (p, q) удовлетворяет условиям неравенства Гельдера. При этом функция $(|f(x) + g(x)|^{p-1})^q = |f(x) + g(x)|^p$ суммируема по доказанному. Применяя неравенство Гельдера, получаем:

$$\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu\right)^{1/q} + \\ + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu\right)^{1/q}$$

Используя обозначение

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

перепишем это неравенство в виде

$$\|f + g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p/q}.$$

Но поскольку $p - \frac{p}{q} = p(1 - \frac{1}{q}) = 1$, то, поделив на ненулевое число $\|f + g\|_p^{p/q}$, получаем неравенство Минковского. Теорема доказана.

Вспомним определение нормированного пространства.

Определение. Нормированным пространством называется пара $(E, \|\cdot\|)$, где E — линейное пространство над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), а $\|\cdot\|$ — норма, т.е. отображение E в множество неотрицательных чисел, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

(2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ при всех $x \in E$ и $a \in \mathbb{R}$ (соответственно, $\mathbb{C}$).

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in E$.

Определение. Пусть задано пространство с мерой (X, M, μ), и $p \geqslant 1$. Положим

$$\widehat{L}_p(X) = \{f \,:\, f(x) \text{ измерима}, \ |f|^p \in L(X)\}$$

и обозначим

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Свойство (2) выполнено, поскольку

$$\int\limits_X |af(x)|^p \, d\mu = |a|^p \int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu,$$

а свойство (3) выполнено в силу неравенства Минковского (теорема 11.2). В то же время нетрудно видеть, что свойство (1) вообще говоря, нарушено, поскольку, например, для стандартной меры Лебега найдется ненулевая функция f, эквивалентная нулю, и для нее $\|f\|_p = 0$. Поэтому $\widehat{L}_p(X)$ — не нормированное пространство.

Определение. Пусть $L^0(X) = \{f \,:\, f(x) \text{ измерима}, \ f \sim 0\}$. Нормированным пространством $L_p(X) = L_p(X, M, \mu)$ называется фактор-пространство $\widehat{L}_p(X)/L^0(X)$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Проверим корректность этого определения. Действительно, любая эквивалентная нулю функция после возведения в любую степень p интегрируема. Эквивалентные нулю функции образуют линейное подпространство в $\widehat{L}_p$, поэтому факторизация даёт линейное пространство.

Свойство (1) теперь выполнено по лемме 11.2, так как все функции из $\widehat{L}_p$ с нулевой нормой эквивалентны нулю. Покажем, что если $f \sim g$, то $\|f\|_p = \|g\|_p$. Из неравенства Минковского, как и из любого неравенства треугольника, следует, что

$$\big|\, \|f\|_p - \|g\|_p \,\big| \leqslant \|f - g\|_p = 0.$$

Таким образом, норма определена корректно. Свойства нормы (2) и (3) выполнены для L_p, так как они выполнены для $\widehat{L}_p$ и норма не зависит от выбора элемента класса.