Лекция 11 по функциональному анализу 9 ноября 2020 года,
мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 9: Произведения мер

Как и в случае интеграла Римана, при изучении интеграла Лебега по декартову произведению двух множеств часто бывает удобнее представить его как повторный интеграл. В данной теме мы обсудим, при каких условиях это возможно.

Пусть заданы две или более мер m_k на полукольцах S_k. Прежде всего, рассмотрим вопрос: на какой системе множеств можно задать декартово произведение этих мер ?

Определение. Пусть S_k, $k = 1, \ldots, n$ — полукольца. Тогда их прямым произведением $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ называется система множеств, представимых в виде $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, где $A_k \in S_k$.

Лемма 9.1. *Прямое произведение полуколец является полукольцом.*

Доказательство.

Декартово произведение пустых множеств есть пустое множество. Пересечение декартовых произведений равно декартову произведению пересечений:

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = \{(x_1, \ldots x_n) \,:\, x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n,\\ x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_n\} = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n).$$

Пусть $A_k \in S_k$ и $A_k^1 \in S_k$, причем

$$A_1^1 \times \cdots \times A_n^1 \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n,$$

где множество слева непусто. Тогда при каждом k $A_k^1 \subseteq A_k$, и так как S_k — полукольца, то найдутся такие $A_k^j \in S_k$, $j = 2, \ldots, p_k$, что при каждом k выполнено равенство $A_k = \bigsqcup_{j=1}^{p_k} A_k^j$. Нетрудно видеть, что

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \bigsqcup_{j_1=1}^{p_1} \cdots \bigsqcup_{j_n=1}^{p_n} (A_1^{j_1} \times \cdots \times A_n^{j_n}).$$

Все члены в правой части равенства принадлежат прямому произведению полуколец, и один из них есть наше заданное множество $A_1^1 \times \cdots \times A_n^1$. Таким образом, все свойства полукольца выполнены, и лемма доказана.

Замечание. Если накладывать на системы S_k более сильные требования, например, чтобы они были кольцами, то их прямое произведение может не оказаться кольцом. Можно лишь утверждать, что если системы S_k имеют единицы X_k, то декартово произведение единиц будет единицей прямого произведения.

Если на двух или более полукольцах заданы меры, то естественно на прямом произведении этих полуколец ввести меру-произведение следующим образом.

Определение. Пусть m_k — меры на полукольцах S_k и $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Произведением мер m_k называется функция $m = m_1 \cdots m_n$ на S, определяемая равенством

$$m(A_1 \times \cdots \times A_n) = m_1(A_1) \cdots m_n(A_n)$$

(при этом считается $0 \cdot \infty = 0$ и $a \cdot \infty = \infty$, $0 < a \leqslant \infty$).

Вначале необходимо проверить, что m — мера. Поскольку по определению

$$m_1 \cdots m_n = (\cdots((m_1 m_2) m_3) \cdots m_n),$$

то достаточно проверить это при $n = 2$. Пусть

$$A = A_1 \times A_2 = \bigsqcup_{j=1}^{m} B^j = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_1^j \times B_2^j,$$

где $A_1, B_1^j \in S_1$ и $A_2, B_2^j \in S_2$ — непустые. По лемме 1.2 найдутся такие непустые множества $C_1^i \in S_1$ и $C_2^l \in S_2$, что $A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{I} C_1^i$ и $A_2 = \bigsqcup_{l=1}^{L} C_2^l$, каждое из B_1^j есть объединение некоторых из C_1^i, а каждое из B_2^j есть объединение некоторых из C_2^l. Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{I} \bigsqcup_{l=1}^{L} C_1^i \times C_2^l \text{ и } mA = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} m_1(C_1^i) m_2(C_2^l).$$

С другой стороны, каждое B^j есть объединение некоторых из $C_1^i \times C_2^l$, то есть

$$B^j = \bigsqcup_{(i,l) \in M_j} C_1^i \times C_2^l, \text{ и } mB^j = \sum_{(i,l) \in M_j} m_1(C_1^i) m_2(C_2^l),$$

и так как множества B^j попарно не пересекаются и в объединении дают A, то множества пар индексов M_j попарно не пересекаются и в объединении дают все $I \cdot L$ пар. Отсюда и вытекает, что $mA = \sum_j mB^j$.

Теорема 9.1. *Произведение σ-аддитивных конечных или σ-конечных мер является σ-аддитивной мерой, конечной или σ-конечной.*

Доказательство.

Как и в предыдущих рассуждениях, достаточно рассмотреть произведение двух мер.

Пусть m_1 и m_2 — две σ-аддитивные меры, $m = m_1 \cdot m_2$. Обозначим через μ_1 лебеговское продолжение меры m_1. Пусть $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C = A \times B$, $C_n = A_n \times B_n$, $A, A_n \in S_1$, $B, B_n \in S_2$. Нам надо доказать, что $mC = \sum_n mC_n$. Если для некоторого n $mC_n = +\infty$, или если $\sum_k mC_k = +\infty$, то по теореме 4.3(Б) тем более $mC = +\infty$, и доказывать нечего.

Пусть $\sum_k mC_k < +\infty$. Определим на множестве A функции

$$f_n(x) = \begin{cases} m_2(B_n), & x \in A_n \\ 0, x \notin A_n. \end{cases}$$

Зафиксируем точку $x \in A$. Множество тех x, для которых хотя бы одна из функций $f_n(x)$ бесконечна, есть объединение соответствующих A_n, то есть имеет меру нуль в силу условия $mC_n < \infty$. Пусть x не относится к таким. Заметим, что для каждого $y \in B$ $(x, y) \in C$, то есть найдется единственное такое n, что $(x, y) \in A_n \times B_n$. Поэтому

$$\bigsqcup_{n \,:\, x \in A_n} B_n = B.$$

Тогда в силу σ-аддитивности меры m_2 получим, что $\sum_n f_n(x) = m_2 B$ почти всюду на A. Но, с другой стороны,

$$\int\limits_A f_n(x) d\mu_1 = m_1 A_n \, m_2 B_n.$$

Применяя к ряду с неотрицательными членами $\sum_n f_n(x)$ теорему Б. Леви (интегралы от частичных сумм равномерно ограничены в силу предположения $\sum_k mC_k < +\infty$), получим, что

$$\sum_n \int\limits_A f_n(x) d\mu_1 = \int\limits_A m_2 B d\mu_1 = \mu_1 A \, m_2 B = m_1 A \, m_2 B.$$

Подставляя одно в другое, получаем, что

$$mC = m_1 A \, m_2 B = \sum_n m_1 A_n \, m_2 B_n = \sum_n mC_n,$$

что и требовалось.

Покажем, что мера m конечна либо σ-конечна. Пусть X и Y — единицы исходных полуколец. Если $m_1 X < \infty$, $m_2 Y < \infty$, то $m(X \times Y) = m_1 X \cdot m_2 Y < \infty$. Если же $X = \bigsqcup_k X_k$, $Y = \bigsqcup_j Y_j$, где $m_1 X_k < \infty$ и $m_2 Y_j < \infty$, то $X \times Y = \bigsqcup_{k,j} X_k \times Y_j$, где $m(X_k \times Y_j) = m_1 X_k \cdot m_2 Y_j < \infty$. Аналогично рассматривается случай, когда одна мера конечна, а другая — σ-конечна. Теорема доказана.

Поскольку прямое произведение σ-алгебр не является σ-алгеброй, то рассматривать интеграл Лебега по произведению мер нельзя. Поэтому вводится следующее понятие.

Определение. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — конечные или σ-конечные σ-аддитивные меры на σ-алгебрах S_k. Тогда их прямым произведением $\mu = m_1 \times \cdots \times m_n$ называется продолжение по Лебегу меры $m = m_1 \cdots m_n$, т.е. их определенного выше произведения.

Прямое произведение, как всякая мера Лебега, является полной σ-аддитивной мерой на σ-алгебре.

Теорема 9.2. *(Фубини, без доказательства) Пусть (X_j, M_j, μ_j), $j = 1, 2$ — пространства с полными мерами, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ — их прямое произведение, определенное на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ с единицей $X = X_1 \times X_2$. Пусть $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Тогда*

1. Функция $f(x, \cdot)$ измерима и интегрируема на X_2 по мере μ_2 при μ_1-почти всех $x \in X_1$.

2. Функция $I_f(x) = \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ (доопределенная произвольным образом на множестве меры нуль, где этот интеграл не существует) измерима на X_1 и интегрируема относительно меры μ_1.

3. Имеет место равенство

$$\int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x, y) = \int\limits_{X_1} I_f(x)\, d\mu_1(x) = \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

Кратко это выражают следующим образом: из существования двойного интеграла следует существование повторного и их равенство.

Замечание. Из соображений симметрии ясно, что существует и другой повторный интеграл, который тоже равен двойному, в частности, при этом повторные интегралы равны. Но из существования повторных интегралов не следует их равенства, а даже если они равны, то отсюда не следует существования двойного интеграла.

Однако имеет место

Теорема 9.3. *(Тонелли) Пусть (X_j, M_j, μ_j), $j = 1, 2$ — пространства с полными мерами, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ — их прямое произведение, определенное на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ с единицей $X = X_1 \times X_2$. Пусть функция f измерима на $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и существует конечный интеграл*

$$\int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} |f(x, y)| \, d\mu_2(y) \right) \, d\mu_1(x).$$

Тогда $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Доказательство.

В силу леммы 7.12 (Б) и измеримости f достаточно доказать утверждение для $|f|$, т.е. рассмотреть случай неотрицательной функции. Если $\mu_1 X_1 = +\infty$, то, пользуясь определением σ-конечной меры, выберем такие $X_{1,n} \in M_1$, что $\mu_1 X_{1,n} < +\infty$, $X_{1,n} \subset X_{1,n+1}$, $X_1 = \bigcup_n X_{1,n}$. Если же $\mu_1 X_1 < +\infty$, то положим $X_{1,n} = X_1$ при всех n. Аналогично построим исчерпание X_2 множествами $X_{2,n} \in M_2$, $\mu_2 X_{2,n} < +\infty$. Рассмотрим теперь функции

$$f_n(x, y) = \min\{f(x, y), n\} \cdot \chi_{X_{1,n}}(x) \cdot \chi_{X_{2,n}}(y).$$

Эти неотрицательные функции измеримы, отличны от нуля лишь на множестве конечной меры и ограничены (числом n), следовательно, каждая из них интегрируема на X по лемме 7.11, и по теореме Фубини

$$\int\limits_X f_n(x, y) \, d\mu(x, y) = \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f_n(x, y) \, d\mu_2(y) \right) \, d\mu_1(x).$$

При этом $f_n(x, y) \uparrow f(x, y)$ всюду. Так как $f_n(x) \leqslant f(x)$ всюду, то выполнены также оценки

$$\int\limits_X f_n(x, y) \, d\mu(x, y) \leqslant \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f(x, y) \, d\mu_2(y) \right) \, d\mu_1(x) = K < \infty.$$

Таким образом, мы можем применить теорему Б. Леви и получить, что $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Теорема доказана.

Добавление: интегрирование комплекснозначных функций

Материал тем 6–9 относился к функциям, принимающим вещественные значения. Но важен и случай функций с комплексными значениями.

Определение. Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим функцию $f : X \to \mathbb{C}$, имеющую вид $f(x) = u(x) + iv(x)$, где u и v действуют из X в $\mathbb{R}$. Функция f называется измеримой, если u и v измеримы. Функция f называется интегрируемой по Лебегу, если $u, v \in L(X)$. Интегралом Лебега от интегрируемой функции f называется

$$\int\limits_X f(x) \, d\mu = \int\limits_X u(x) \, d\mu + i \int\limits_X v(x) \, d\mu.$$

Простой функцией, как и в вещественном случае, назовём измеримую функцию с конечным числом значений, равную нулю вне некоторого множества конечной меры. Нетрудно видеть, что функция $f = u + iv$ — простая тогда и только тогда, когда u и v простые.

Лемма Д.1. *Пусть f — интегрируемая комплекснозначная функция. Тогда существует такая последовательность простых функций $\{f_n\}$, что $f_n(x) \to f(x)$ всюду и $|f_n(x)| \uparrow |f(x)|$ всюду (в частности, $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$ всюду), причем для вещественных и мнимых частей этих функций выполнены условия $|u_n(x)| \uparrow |u(x)|$ и $|v_n(x)| \uparrow |v(x)|$.*

Доказательство.
Пользуясь леммой 7.1, построим простые функции $u_n^+ \uparrow u^+$, $u_n^- \uparrow u^-$, $v_n^+ \uparrow v^+$ и $v_n^- \uparrow v^-$. Положим $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $v_n = v_n^+ - v_n^-$. Тогда $f_n = u_n + iv_n \to f = u + iv$ всюду. Поскольку у любой вещественнозначной функции положительная и отрицательная части отличны от нуля на дизъюнктных множествах, то $|u_n(x)| \uparrow |u(x)|$ и $|v_n(x)| \uparrow |v(x)|$. Из неравенств $|u_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$ и $|v_n(x)| \leqslant |v_{n+1}(x)|$ получаем, что $|f_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)|$, то есть $|f_n(x)| \uparrow |f(x)|$ всюду. Лемма доказана.

Теорема Д.1. *Измеримая комплекснозначная функция f интегрируема тогда и только тогда, когда $|f| \in L(X)$, и в случае интегрируемости*

$$\left| \int\limits_X f(x)\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\, d\mu.$$

Доказательство.
Пусть $f(x) = u(x) + iv(x)$. Поскольку всегда верны неравенства

$$|u(x)| \leqslant |f(x)|, \quad |v(x)| \leqslant |f(x)|, \quad |f(x)| \leqslant |u(x)| + |v(x)|,$$

то из леммы 7.12 (Б) об одновременной интегрируемости измеримой вещественнозначной функции и её модуля, леммы 7.9 об интегрируемости суммы неотрицательных интегрируемых функций и из леммы 7.12 (А) следует, что и в комплекснозначном случае f и $|f|$ одновременно интегрируемы или не интегрируемы. Рассмотрим теперь простые функции

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} w_{n,k} \chi_{E_{n,k}}(x),$$

построенные для f в лемме Д.1, и пусть $w_{n,k} = u_{n,k} + iv_{n,k}$. Тогда по определению

$$\int\limits_X f_n(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{k_n} u_{n,k} \mu E_{n,k} + i \sum_{k=1}^{k_n} v_{n,k} \mu E_{n,k} = \sum_{k=1}^{k_n} w_{n,k} \mu E_{n,k},$$

откуда

$$\left| \int\limits_X f_n(x)\, d\mu \right| = \left| \sum_{k=1}^{k_n} w_{n,k} \mu E_{n,k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} |w_{n,k}| \mu E_{n,k} = \int\limits_X |f_n(x)|\, d\mu.$$

Поскольку $|f(x)|$ будет интегрируемой мажорантой и для $\{u_n(x)\}$, и для $\{v_n(x)\}$, и для $\{|f_n(x)|\}$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что

$$\int\limits_X f_n(x)\, d\mu \to \int\limits_X f(x)\, d\mu, \quad \int\limits_X |f_n(x)|\, d\mu \to \int\limits_X |f(x)|\, d\mu$$

при $n \to \infty$, и в пределе получаем требуемое неравенство.

Для интеграла Лебега от комплекснозначной функции сохраняются многие свойства. Например, рассматривая отдельно вещественную и мнимую части или рассматривая модули, моэжно доказать линейность класса $L(X)$, теорема Лебега о предельном переходе, теоремы Фубини и Тонелли.

Тема 10 : Заряды.

До сих пор мы рассматривали меры — неотрицательные аддитивные функции множества. Но в приложениях важен и случай аддитивной функции множества, принимающей значения любого знака. Мы будем сразу предполагать счетную аддитивность.

Определение. Пусть M — σ-алгебра с единицей X (элементы M будем называть измеримыми множествами). Функция Φ, действующая из M в $\mathbb{R}$, называется зарядом, если она удовлетворяет условию σ-аддитивности, то есть для любых таких A, A_n из M, что $A = \bigsqcup_n A_n$ (конечное или счетное объединение), выполнено условие

$$\Phi(A) = \sum_n \Phi(A_n),$$

где ряд абсолютно сходится.

Для зарядов выполнены те свойства σ-аддитивных мер, которые не связаны с неотрицательностью, например, непрерывность. В отличие от мер, у зарядов не допускаются бесконечные значения, так как это может привести к неопределенностям типа $\infty + (-\infty)$.

Определение. Множество $A \in M$ называется положительным (отрицательным) относительно заряда Φ, если для любого $B \in M$, вложенного в A, выполнено неравенство $\Phi(B) \geqslant 0$ (соответственно, $\Phi(B) \leqslant 0$).

Из определения сразу следует, что подмножество положительного/отрицательного множества, тоже лежащее в M — само положительно/отрицательно.

Нетрудно видеть, что сужение заряда на положительное множество A (точнее, на $M|_A$) является σ-аддитивной мерой, а сужение заряда на отрицательное множество — «минус мерой». Мы докажем, что всю единицу X можно разбить на две части, на которых сосредоточены положительная и отрицательная составляющие заряда.

Лемма 10.1. *Пусть множества A_n — отрицательные относительно Φ. Тогда $A = \bigcup_n A_n$ — отрицательное.*

Доказательство.
Заметим, что все множества

$$E_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

измеримы, они отрицательны как подмножества отрицательного множества, и $A = \bigsqcup_n E_n$. Поэтому для любого множества $G \in M$, вложенного в A, имеем:

$$\Phi(G) = \sum_n \Phi(G \cap E_n) \leqslant 0.$$

Лемма доказана.