Лекция 10 по функциональному анализу 2 ноября 2020 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 8: Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Для интеграла Римана обычно доказывается следующая теорема о предельном переходе: если функции равномерно сходятся на отрезке, то интегралы Римана от них сходятся к интегралу от предельной функции. Более слабые условия, например поточечная сходимость, не гарантируют ограниченности и непрерывности (хотя бы п.в.) предельной функции, а значит, и интегрируемости по Риману.

Для интеграла Лебега одной только поточечной сходимости, вообще говоря, тоже недостаточно. Хотя предельная функция обязана быть измеримой по лемме 6.2, но она может не быть интегрируемой или интегралы могут не сходиться к интегралу от предельной функции.

Пример: Рассмотрим на $[0,1]$ функции

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2, & x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0, & x = 0 \text{ или } x \geqslant \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Эти функции всюду сходятся к тождественно нулевой, но

$$\int\limits_{[0,1]} f_n(x)\, d\mu = n \to +\infty.$$

Тем не менее, можно наложить дополнительные условия, которые слабее равномерной сходимости, но достаточны для предельного перехода.

Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой; для простоты будем считать меру полной.

Теорема 8.1.*(Теорема Лебега, или теорема о мажорируемой сходимости). Пусть f_n — измеримые функции на X, g — суммируемая функция на X, $f_n(x) \to f(x)$ п.в. на X и при каждом n $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ п.в. на X (g — мажоранта). Тогда функции f_n и f интегрируемы по Лебегу на X, и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu = \int\limits_X f(x)\, d\mu.$$

Доказательство.

Прежде всего, f измерима как предел последовательности измеримых функций почти во всех точках. При этом $|f(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду, и по лемме 7.12 (A) f_n и f интегрируемы по Лебегу на X.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Если $\mu X < \infty$, то положим $A_\varepsilon = X$. В случае же σ-конечной меры рассмотрим разбиение X на множества X_k конечной меры. Так как по теореме 7.3 сходится ряд из неотрицательных слагаемых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} g(x)\, d\mu = \int\limits_X g(x)\, d\mu,$$

то найдется такое M, что
$$\sum_{k=M+1}^{\infty}\int\limits_{X_k} g(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{6}.$$
Положим $A_\varepsilon = \bigsqcup_{k=1}^{M} X_k$, тогда
$$\int\limits_{X\setminus A_\varepsilon} g(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{6}.$$
Далее, для любого n
$$\left|\int\limits_X f_n(x)\,d\mu - \int\limits_{A_\varepsilon} f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_{X\setminus A_\varepsilon} |f_n(x)|\,d\mu \leqslant \int\limits_{X\setminus A_\varepsilon} g(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{6},$$
и аналогичное неравенство верно для f. Так как функция g интегрируема на A_ε, то по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега (теорема 7.5) найдется такое $\delta > 0$, что для любого множества $B \in M$, $B \subset A_\varepsilon$ с $\mu B < \delta$ выполнено условие
$$\int\limits_B g(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{6}.$$
Поскольку $\mu A_\varepsilon < +\infty$, то применима теорема Егорова, и найдется такое $B_\delta \subset A_\varepsilon$, что $\mu B_\delta < \delta$ и на $C_\varepsilon = A_\varepsilon \setminus B_\delta$ сходимость последовательности равномерна. Выберем такое N, что при $n > N$ всюду на C_ε выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3\mu C_\varepsilon}$.

Тогда при $n > N$ получаем оценки:
$$\left|\int\limits_X f_(x)\,d\mu - \int\limits_X f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_{C_\varepsilon} |f(x) - f_n(x)|\,d\mu + \int\limits_{B_\delta} |f(x)|\,d\mu + \int\limits_{B_\delta} |f_n(x)|\,d\mu +$$
$$+ \int\limits_{X\setminus A_\varepsilon} |f_n(x)|\,d\mu + \int\limits_{X\setminus A_\varepsilon} |f(x)|\,d\mu \leqslant \mu C_\varepsilon \frac{\varepsilon}{3\mu C_\varepsilon} + 2\int\limits_{B_\delta} g(x)\,d\mu + 2\int\limits_{X\setminus A_\varepsilon} g(x)\,d\mu < \varepsilon.$$
Теорема доказана.

Следующая теорема может быть использована не только для предельного перехода под знаком интеграла, но и для доказательства сходимости последовательности функций к конечному пределу.

Теорема 8.2. *(Теорема Б. Леви, или теорема о монотонной сходимости.) Пусть f_n — интегрируемые на A функции, причем $f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$ почти всюду на A для всех k, и интегралы $\int_A f_n(x)\,d\mu$ ограничены в совокупности некоторой величиной K. Тогда почти всюду существует конечный предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, функция $f(x)$ интегрируема, и*
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(x)\,d\mu = \int\limits_A f(x)\,d\mu.$$

Доказательство.
Пусть
$$\Omega_n^r = \{x \,:\, f_n(x) > r\}.$$
Тогда по неравенству Чебышева $\mu\Omega_n^r \leqslant \frac{K}{r}$. В силу монотонности последовательности эти множества при каждом r образуют расширяющуюся последовательность по n. Заметим, что
$$\Omega = \{x \,:\, f_n(x) \to \infty\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^r.$$
Здесь внешнее пересечение является пересечением вложенных сужающихся множеств. Дважды применяя свойство непрерывности меры (сначала снизу, потом сверху), получаем, что
$$\mu\Omega = \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu\Omega_n^r \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{K}{r} = 0,$$
то есть что $\mu\Omega = 0$. Таким образом, предельная функция $f(x)$ конечна почти всюду. Пренебрегая множеством меры нуль, будем считать, что f конечна всюду.

Пусть вначале $f_k(x) \geqslant f_1(x) \geqslant 0$. Положим $f_0(x) \equiv 0$. По лемме 7.1 построим неотрицательные простые функции $h_{k,i}(x) \uparrow (f_k(x) - f_{k-1}(x))$ при $i \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Определим простые функции $g_k(x) = \sum_{j=1}^{k} h_{j,k}(x)$. По построению $g_k(x) \leqslant g_{k+1}(x)$. Так как
$$g_k(x) \leqslant \sum_{j=1}^{k} (f_j(x) - f_{j-1}(x)) = f_k(x) \leqslant f(x),$$
то
$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_A g_k(x)\, d\mu \leqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_A f_k(x)\, d\mu \leqslant K.$$
Далее, для любого n выполняется оценка
$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) \geqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} h_{j,k}(x) = \sum_{j=1}^{n} \lim_{k\to\infty} h_{j,k}(x) = f_n(x).$$
В силу произвольности n получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) \geqslant f(x)$, что вместе дает $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$. Согласно лемме 7.7,
$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_A g_k(x)\, d\mu = \int\limits_A f(x)\, d\mu.$$
Тогда тем более
$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_A f_k(x)\, d\mu = \int\limits_A f(x)\, d\mu.$$
Случай неотрицательных f_n тем самым доказан. Общий случай получается из него переходом к неотрицательным функциям $f_n(x) - f_1(x)$.

Следствие. *Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций, $f_n(x) \uparrow f(x) < +\infty$ п.в., то*
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu = \int\limits_X f(x)\, d\mu.$$

Доказательство.

Если хотя бы один из интегралов от f_n бесконечен, или если предел слева бесконечен, то в силу монотонности последовательности интегралов тем более интеграл от f бесконечен. Если же предел слева конечен, то $\{f_n\}$ и f удовлетворяют условиям теоремы Леви.

Замечание. Теоремы Лебега и Б. Леви можно переформулировать в терминах почленного интегрирования рядов следующим образом.

Следствие. *Если $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ — п.в. сходящийся ряд из измеримых на X функций, и существует такая $g \in L(X)$ (мажоранта), что*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leqslant g(x)$$

для всех n и почти всех $x \in X$, то

$$\int\limits_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_k(x)\, d\mu, \qquad (\#)$$

причем все интегралы в нем существуют и конечны.

Следствие. *Если ряд из неотрицательных интегрируемых функций f_k таков, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_k(x)\, d\mu < +\infty,$$

то сумма $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ конечна п.в. на X и верно равенство (#).

Следующая теорема не утверждает справедливость предельного перехода, но бывает полезна, так как накладывает более слабые условия, чем предыдущие теоремы.

Теорема 8.3. *(Теорема Фату, или лемма Фату.) Пусть $f_n(x)$ — неотрицательные интегрируемые функции на множестве A, причем $f_n(x) \to f(x)$ п.в. на A. Если интегралы $\int_A f_n(x)\, d\mu$ ограничены в совокупности, то f интегрируема на A и*

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\, d\mu.$$

Доказательство.

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что указанный нижний предел есть предел всей последовательности интегралов. Определим функции $\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x)$. Тогда $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ всюду на A, а из неравенства $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$ следует, что все функции $\varphi_n(x)$ интегрируемы и

$$\int\limits_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \int\limits_A f_n(x)\, d\mu < K.$$

Заметим, что если $f_n(x) \to f(x)$, то и $\varphi_n(x) \to f(x)$. Применяя к последовательности $\{\varphi_n\}$ теорему Б. Леви, получаем, что f интегрируема и

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\, d\mu.$$

Теорема доказана.

Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Рассмотрим классическую меру Лебега на отрезке. Тогда имеет место следующая основная теорема.

Теорема 8.4. *Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда она интегрируема по Лебегу относительно классической меры, и интегралы Римана и Лебега совпадают.*

Доказательство.

Пусть $T_n = \{(x_{n,k}, \xi_{n,k})\}_{k=1}^{k_n}$ — размеченные разбиения отрезка $[a, b]$, а их диаметры $\lambda(T_n)$ стремятся к нулю. Определим простые функции

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} f(\xi_{n,k})\chi_{[x_{n,k-1}, x_{n,k})}(x).$$

По построению они измеримы и

$$(L)\int\limits_{[a,b]} f_n(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{k_n} f(\xi_{n,k})\mu[x_{n,k-1}, x_{n,k}) = S(f, T_n).$$

Заметим, что для любой точки $x \in [a, b)$ имеет место равенство $f(x) - f_n(x) = f(x) - f(\xi_{n,k(x,n)})$, где $|x - \xi_{n,k(x,n)}| \leqslant \lambda(T_n)$. Таким образом, $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке непрерывности, то есть, согласно критерию Лебега интегрируемости по Риману, почти всюду. Учитывая, что $\sup|f_n| \leqslant \sup|f| < \infty$, а $\mu[a, b] = b - a < \infty$, получаем, что можно применить теорему Лебега с тождественно постоянной мажорантой и получить, что

$$(L)\int\limits_{[a,b]} f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty}(L)\int\limits_{[a,b]} f_n(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} S(f, T_n) = (R)\int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 8.5. *Пусть $a < b \leqslant \infty$ и при каждом $b' \in (a, b)$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b']$. Тогда она интегрируема по Лебегу относительно классической меры на $[a, b)$ тогда и только тогда, когда несобственный интеграл Римана сходится абсолютно. В случае интегрируемости несобственный интеграл Римана и интеграл Лебега совпадают.*

Доказательство.

Рассмотрим произвольную последовательность $b_n \uparrow b$, $b_0 = a$. Тогда $[a, b) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}[b_{k-1}, b_k)$. Для любого n по теореме 8.4 и следствию из леммы 7.10 имеем

$$(R)\int\limits_a^{b_n} f(x)\, dx = (L)\int\limits_{[a,b_n)} f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} (L)\int\limits_{[b_{n-1},b_n)} f(x)\, d\mu \qquad (*)$$

и аналогично

$$(R)\int\limits_a^{b_n} |f(x)|\, dx = (L)\int\limits_{[a,b_n)} |f(x)|\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} (L)\int\limits_{[b_{n-1},b_n)} |f(x)|\, d\mu.$$

Если интеграл Римана абсолютно сходится, то существует конечный предел интегралов слева, значит, существует и конечный предел сумм справа, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (L) \int\limits_{[b_{n-1}, b_n)} |f(x)| \, d\mu < \infty;$$

по второму следствию из теоремы 7.3 f интегрируема по Лебегу.

Обратно, если интеграл Лебега от f сходится, то по первому следствию из теоремы 7.3

$$\sum_{k=1}^{\infty} (L) \int\limits_{[b_{n-1}, b_n)} |f(x)| \, d\mu < \infty,$$

т.е. существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} (R) \int\limits_{a}^{b_n} |f(x)| \, dx;$$

в силу произвольности $\{b_n\}$ это означает существование несобственного интеграла Римана от $|f(x)|$.

В случае интегрируемости можно перейти к пределу в равенстве $(*)$ для самой f и получить равенство интегралов.

Замечание. Аналогично рассматривается случай, когда несобственный интеграл Римана от f имеет особенность в левом конце промежутка или в обоих концах.