Лекция 9 по функциональному анализу 26 октября 2020 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 7: Конструкция интеграла Лебега (продолжение)

Общее определение интеграла Лебега

Определение. Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X. Введем множество $J(f) = \{h : h - \text{простая}, \forall x \in X\ 0 \leqslant h(x) \leqslant f(x)\}$.

Интегралом Лебега от f по множеству X называется

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sup_{h \in J(f)} \int\limits_X h(x)\,d\mu.$$

Если эта величина конечна, то функция f называется интегрируемой (суммируемой) по Лебегу на X.

Определение. Пусть f — измеримая функция на X. Введем функции

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ и } f^-(x) = -\min\{f(x), 0\},$$

которые называются положительной и отрицательной частями f соответственно. По построению эти функции неотрицательны.

Функция f называется интегрируемой (суммируемой) по Лебегу на X, если обе функции f^+ и f^- интегрируемы по Лебегу. Интегралом Лебега от f по множеству X называется величина

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \int\limits_X f^+(x)\,d\mu - \int\limits_X f^-(x)\,d\mu.$$

Класс функций, интегрируемых по Лебегу на множестве X, обозначается как $L(X, M, \mu)$, или просто $L(X)$, если пространство с мерой ясно из контекста.

Если же задано множество $E \in M$, то интеграл по E можно определять либо через сужение σ-алгебры (т.е. $L(E) = L(E, M|_E, \mu|_{M|_E})$), либо по формуле

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\chi_E(x)\,d\mu.$$

Эти определения равносильны, мы будем пользоваться тем, которое нам в конкретном случае удобнее. Нетрудно видеть, что если измеримая функция интегрируема на множестве, то она интегрируема на любом его измеримом подмножестве.

Лемма 7.6. *Для простой функции определения интеграла Лебега согласованы. Для измеримой неотрицательной функции определения интеграла Лебега согласованы.*

Доказательство.

Для неотрицательной простой функции f утверждение следует из второй части леммы 7.4 (об интегрировании неравенств), ведь $f \in J(f)$. Поэтому в общем случае интегралы от положительной и отрицательной части в обоих смыслах совпадают, а тогда по лемме 7.2 о линейности совпадает значение интеграла от функции.

Для измеримой неотрицательной функции f по определению $f^+ = f$, $f^- = 0$, поэтому противоречия между определениями не возникает.

Лемма 7.7. *Если $\{g_n(x)\}$ — неубывающая последовательность простых неотрицательных функций, сходящаяся в каждой точке к конечному пределу $f(x)$, то*

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu.$$

Доказательство.

Для каждой функции g_n интеграл от нее не превосходит интеграла от f по определению интеграла от неотрицательной функции. Поэтому

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu \geqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu.$$

Но если $g \in J(f)$, то g и $\{g_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы 7.1, из которой получаем

$$\int\limits_X g(x)\,d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu,$$

что после перехода к точной верхней грани даёт обратное неравенство.

Лемма 7.8. *Если $\mu E = 0$, функция f измерима (в случае полной меры второе условие следует из первого), то f интегрируема и $\int_E f\,d\mu$.*

Доказательство.

Для простой функции утверждение тривиально. Для положительной и отрицательной частей измеримой, следовательно, супремум нулей равен нулю.

Лемма 7.9. *Если f и g — неотрицательные измеримые функции на X, $\alpha, \beta > 0$, то*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f\,d\mu + \beta \int\limits_X g\,d\mu.$$

Если f — неотрицательная измеримая функция на $X = A \sqcup B$, то

$$\int\limits_X f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_B f\,d\mu.$$

Доказательство.

Построим простые $f_n \uparrow f$ и $g_n \uparrow g$. Тогда $\alpha f_n + \beta g_n \uparrow \alpha f + \beta g$. По лемме 5.3 справедливо равенство

$$\int\limits_X (\alpha f_n + \beta g_n)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f_n\,d\mu + \beta \int\limits_X g_n\,d\mu.$$

Переходя к пределу в обеих его частях, в силу леммы 7.7 получим первое утверждение леммы. Аналогично предельным переходом из леммы 7.5 получается второе утверждение.

Следствие. *Если измеримая функция f интегрируема на множествах $A_k \in M$, то она интегрируема на их конечном объединении A. Если эти множества попарно не пересекаются, то*

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{A_k} f(x)\,d\mu$$

Доказательство.

В случае непересекающихся множеств, применяем второе утверждение леммы к положительной и отрицательной частям f, а затем вычитаем получившиеся равенства. В общем случае, из интегрируемости на A_k следует интегрируемость на $B_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_k$, а тогда по доказанному — и на $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$.

Лемма 7.10. *Если f — измеримая функция на X, то*

$$\int\limits_X \alpha f\,d\mu = \alpha \int\limits_X f\,d\mu.$$

Доказательство.

При $\alpha = 0$ утверждение тривиально. Заметим, что если $\alpha > 0$, то $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, а если $\alpha < 0$, то $(\alpha f)^+ = |\alpha| f^-$, $(\alpha f)^- = |\alpha| f^+$. Применяя к $(\alpha f)^+$ и $(\alpha f)^-$ лемму 7.9, сразу получим требуемое при $\alpha > 0$, а при $\alpha < 0$ по той же лемме имеем

$$\int\limits_X \alpha f\,d\mu = \int\limits_X (\alpha f)^+\,d\mu - \int\limits_X (\alpha f)^-\,d\mu = \int\limits_X |\alpha| f^-\,d\mu - \int\limits_X |\alpha| f^+\,d\mu =$$

$$= |\alpha| \left(\int\limits_X f^-\,d\mu - \int\limits_X f^+\,d\mu \right) = \alpha \int\limits_X f\,d\mu.$$

Теорема 7.2. *Если f и g — измеримые функции на X, то*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f\,d\mu + \beta \int\limits_X g\,d\mu.$$

Доказательство.

В силу леммы 7.10 достаточно рассмотреть случай $\alpha = \beta = 1$. Разобьем X на множества, где f и g принимают определенный знак. Если знаки совпадают или одна из функций равна нулю, то на таком множестве равенство следует из первой части леммы 7.9 и из леммы 7.10. Рассмотрим, например, $E = \{x : f(x) > 0, g(x) < 0\}$. Оно делится на две части: $E_1 = \{x \in E : f(x) + g(x) \geqslant 0\}$ и $E_2 = \{x \in E : f(x) + g(x) < 0\}$. На E_1 по лемме 7.9 имеем

$$\int\limits_{E_1} f\,d\mu = \int\limits_{E_1} (f+g)\,d\mu + \int\limits_{E_1} (-g)\,d\mu,$$

откуда по лемме 7.10

$$\int_{E_1} (f+g)\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu - \int_{E_1} (-g)\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_1} g\,d\mu$$

На E_2 по леммам 7.9 и 7.10 имеем

$$\int_{E_2} (-g)\,d\mu = \int_{E_2} f\,d\mu + \int_{E_2} -(f+g)\,d\mu$$

и далее аналогично. Перегруппировывая слагаемые и складывая по множествам, по следствию из леммы 7.9 получаем утверждение теоремы.

Следствие. *Для любой неотрицательной измеримой функции интеграл Лебега от неё неотрицателен. Если две интегрируемые функции связаны неравенством $f(x) \leqslant g(x)$, то*

$$\int_X f(x)\,d\mu \leqslant \int_X g(x)\,d\mu.$$

Отметим еще некоторые элементарные свойства интеграла Лебега.

Лемма 7.11. *Если f — ограниченная по модулю числом M измеримая функция, равная нулю вне множества E, где $\mu E < \infty$, то f интегрируема и*

$$\left| \int_X f(x)\,d\mu \right| \leqslant M\mu E.$$

Доказательство.

Если f ограничена, то любая не превосходящая f^+ или f^- простая функция ограничена той же величиной. Пользуясь леммой 7.3 на множествах, где f имеет определенный знак, получаем нужное утверждение.

Лемма 7.12. *(A) Если g интегрируема, f измерима и всюду на X выполнено условие $|f(x)| \leqslant g(x)$, то f интегрируема.*

(Б) Если f измерима, то f и $|f|$ интегрируемы или неинтегрируемы одновременно.

Доказательство.

(A) Для любой простой $h \in J(f^+)$ выполнено условие

$$\int_X h(x)\,d\mu \leqslant \int_X g(x)\,d\mu,$$

поэтому f^+ (и аналогично f^-) интегрируема.

(Б) Если f интегрируема, то $|f| = f^+ + f^-$ интегрируема по лемме 7.9. Обратное следует из пункта (A).

Интеграл Лебега как функция множества.

Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X. Согласно лемме 7.9, система множеств $M_f \subseteq M$, на которых функция f интегрируема, является кольцом, а интеграл есть мера на этой системе. Докажем, что интеграл счетно-аддитивен.

Теорема 7.3. *Пусть A и A_n — измеримые множества, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, неотрицательная функция f измерима на A и при каждом n интегрируема на A_n. Тогда*

$$\int\limits_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f\,d\mu.$$

В частности, если ряд в правой части сходится, то f интегрируема на A.

Доказательство.

По лемме 7.9, любая частная сумма ряда в правой части не превосходит интеграла по всему A. Поэтому, если ряд расходится, то f не интегрируема на A. Пусть теперь ряд сходится. Докажем обратное неравенство. Рассмотрим произвольную неотрицательную простую функцию $h(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{E_k}(x) \leqslant f(x)$. Тогда

$$\int\limits_A h(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{K} c_k \mu E_k = \sum_{k=1}^{K} c_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_k \cap A_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K} c_k \mu(E_k \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} h(x)\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu.$$

Переходя в левой части к точной верхней грани по h, получаем требуемое.

Следствие. *Если A и A_n — измеримые множества, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, f интегрируема на A, то*

$$\int\limits_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f\,d\mu.$$

Доказательство.

Применим теорему к f_+ и f_-, а затем вычтем получившиеся равенства друг из друга.

Следствие. *Если A и A_n — измеримые множества, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, измеримая f интегрируема на каждом A_n и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f|\,d\mu < \infty,$$

то f интегрируема на A.

Доказательство.

Утверждение непосредственно следует из теоремы 7.3, примененной к $|f|$, и леммы 7.12 (Б).

Теорема 7.4. *(Неравенство Чебышёва) Пусть f — неотрицательная интегрируемая функция на A. Тогда для любого $c > 0$*

$$\mu\{x \in A \,:\, f(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_A f(x)\,d\mu.$$

Доказательство.
Положим $A_c = \{x \in A : f(x) \geqslant c\}$ и $A'_c = A \setminus A_c$. Тогда по лемме 7.9

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \int\limits_{A_c} f(x)\,d\mu + \int\limits_{A'_c} f(x)\,d\mu \geqslant \int\limits_{A_c} f(x)\,d\mu \geqslant \int\limits_A c d\mu = c\mu A.$$

Поделив левую и правую части на c, получим неравенство Чебышёва.

Теорема 7.5. *(Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.) Пусть функция f суммируема на A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольного измеримого $B \subseteq A$ с $\mu B < \delta$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_B |f(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство.
Если функция f ограничена, т.е. $|f(x)| \leqslant M$, то в силу леммы 7.11 достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. В общем случае, положим $A_n = \{x \in A : n-1 \leqslant |f(x)| < n\}$. Тогда $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. По теореме 7.3

$$\int\limits_A |f(x)|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu.$$

В частности, ряд в правой части этого равенства сходится. Поэтому можно выбрать такое N, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$C_1 = \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n, \qquad C_2 = \bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} A_n = A \setminus C_1.$$

Тогда $|f(x)| \leqslant N$ на C_1. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$. Тогда для любого измеримого B с $\mu B < \delta$ получаем:

$$\int\limits_B |f(x)|\,d\mu \leqslant \int\limits_{B\cap C_1} |f(x)|\,d\mu + \int\limits_{B\cap C_2} |f(x)|\,d\mu \leqslant \int\limits_{B\cap C_1} N\,d\mu +$$

$$+ \int\limits_{C_2} |f(x)|\,d\mu \leqslant N\frac{\varepsilon}{2N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Теорема доказана.