Лекция 8 по функциональному анализу 19 октября 2020 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 6: Измеримые функции (продолжение)

Мера μ ниже будет полной σ-аддитивной мерой на σ-алгебре.

От сходимости по мере к сходимости почти всюду можно перейти следующим образом.

Теорема 6.3 (Рисс). *Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится по мере μ к измеримой функции f на X. Тогда найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая сходится к f п.в.*

Доказательство.

Пусть, как и на прошлой лекции,

$$E_n(\sigma) = \{x \in E \,:\, |f_n(x) - f(x)| > \sigma\}.$$

Так как при каждом k

$$\mu E_n(\frac{1}{k}) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то можно последовательно выбирать $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы $\mu E_{n_k}(\frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$.

Покажем, что эта подпоследовательность — подходящая. Рассмотрим произвольное $\sigma > 0$, и выберем m так, чтобы $\frac{1}{m} < \sigma$. Заметим, что при $q > m$

$$\bigcup_{k=q}^{\infty}\{x \,:\, |f_{n_k} - f(x)| > \sigma\} \subseteq \bigcup_{k=q}^{\infty}\{x \,:\, |f_{n_k} - f(x)| > \frac{1}{k}\}.$$

Поэтому

$$\mu\bigcup_{k=q}^{\infty}\{x \,:\, |f_{n_k} - f(x)| > \sigma\} \leqslant \sum_{k=q}^{\infty}\mu E_{n_k}(\frac{1}{k}) < \sum_{k=q}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{q-1}} \to 0 \text{ при } q \to \infty,$$

и по теореме 6.2 (А) подпоследовательность f_{n_k} сходится п.в.

Теорема 6.4 (Теорема Егорова).

Пусть последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится п.в. на множестве E, где $\mu E < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое измеримое $E_\varepsilon \subseteq E$, что $\mu E_\varepsilon < \varepsilon$ и сходимость равномерна на $E \setminus E_\varepsilon$.

Доказательство.

Обозначим вновь

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty}\{x \in E \,:\, |f_k(x) - f(x)| > \sigma\}.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое m, что $\frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$. Так как при каждом k по теореме 6.2 (Б)

$$\lim_{n\to\infty} \mu R_n(\frac{1}{k}) = 0,$$

то для всех $k \geqslant m$ можно выбрать такие n_k, что $\mu R_{n_k}(\frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$. Положим

$$E_\varepsilon = \bigcup_{k=m}^{\infty} R_{n_k}(\frac{1}{k}).$$

Тогда по построению $\mu E_\varepsilon < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Покажем, что на дополнении к E_ε имеет место равномерная сходимость. Действительно,

$$E \setminus E_\varepsilon = \bigcap_{k=m}^{\infty} \bigcap_{n=n_k}^{\infty} \{x \,:\, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}\}.$$

Поэтому, выбирая для произвольного $\delta > 0$ такое число $k \geqslant m$, что $\frac{1}{k} < \delta$, получим, что при $n > n_k$ всюду на $E \setminus E_\varepsilon$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \delta$, что и означает равномерную сходимость.

Теорема доказана.

В заключение приведем без доказательства следующее важное свойство измеримых функций на прямой (для классической меры Лебега).

Теорема 6.5. *(C-свойство Лузина.) Функция на отрезке $[a, b]$ измерима относительно классической меры Лебега тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная на этом отрезке функция $f_\varepsilon(x)$, для которой*

$$\mu\{x \,:\, f(x) \neq f_\varepsilon(x)\} < \varepsilon.$$

Замечание. Не следует думать, что в теореме Лузина можно положить $\varepsilon = 0$.

Тема 7: Конструкция интеграла Лебега

В этой теме мы будем предполагать, что нам задана конечная или σ-конечная σ-аддитивная мера μ на σ-алгебре M с единицей X. Тройка (X, M, μ) называется пространством с мерой. Элементы M будем называть измеримыми множествами, а вещественнозначные $(M, \mathcal{B})$-измеримые функции — просто измеримыми.

Простые функции и интеграл Лебега от них.

Определение. Функция $f(x)$ называется простой (простейшей), если она имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x), \qquad (*)$$

где E_k — попарно непересекающиеся измеримые множества конечной меры. Формально можно разрешить некоторым из них иметь бесконечную меру, если соответствующие a_k равны нулю. Это удобно, поскольку некоторые рассуждения упрощаются, если считать, что $\bigsqcup_k E_k = X$.

Замечание. Функция $f(x)$ является простой тогда и только тогда, когда она измерима и принимает конечное множество значений, причем она отлична от нуля лишь на множестве конечной меры.

Действительно, пусть f принимает значения a_k на множествах E_k. Так как одноточечное множество является борелевским, то $E_k = f^{-1}(\{a_k\}) \in M$. При этом функция, очевидно, имеет необходимый вид и множества не пересекаются.

Обратно, если f имеет указанный вид, то она принимает лишь значения a_k и $a_0 = 0$. Последнее значение принимается на измеримом множестве $E_0 = X \setminus \bigsqcup_k E_k$. При этом для любого борелевского E

$$f^{-1}(E) = \bigcup_{a_k \in E} E_k \in M$$

как конечное объединение множеств из M.

Будем писать $a_n \uparrow a$, если $a_n \to a$ и при этом $a_n \leqslant a_{n+1}$ при всех n.

Лемма 7.1. *Для любой неотрицательной измеримой на X функции f существует такая последовательность простых неотрицательных функций $\{f_n\}$, что $f_n(x) \uparrow f(x)$ в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство.

В случае σ-конечной меры, подберем такие множества $X_n \in M$, что $X_n \subset X_{n+1}$, $\bigcup_n X_n = X$ и $\mu X_n < \infty$. Это можно сделать, взяв разбиение $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$ из определения σ-конечной меры и положив $X_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Для конечной меры, положим $X_n \equiv X$.

Рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}, & f(x) \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}), \quad x \in X_n, \quad k \leqslant 2^{2n} \text{ (т.е. } |f(x)| < 2^n), \\ 2^n, & f(x) \geqslant 2^n \text{ и } x \in X_n \\ 0, & x \notin X_n. \end{cases}$$

Функции f_n простые, так как принимают конечное число значений — часть из $\{\frac{k}{2^n}\}_{k=0}^{2^{2n}}$, а указанные множества измеримы в силу измеримости f и их меры конечны, т.к. не превосходят меры X_n. В то же время для любой точки из X по построению $f_n(x) \uparrow f(x)$.

Действительно, если $f_n(x) = 0$, то $f_{n+1}(x) \geqslant 0$. Если $f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}}$, то $f_{n+1}(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}}$ или $f_{n+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$. Наконец, если $f_n(x) = 2^n$, то либо $f_{n+1}(x) = 2^{n+1}$, либо $f(x) \in [2^n, 2^{n+1})$, а тогда и $f_n(x) \in [2^n, 2^{n+1})$. Во всех случаях $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

Далее, для любой точки x найдется такое n_0, что при $n > n_0$ выполнены условия $f(x) \leqslant 2^n$ и $x \in X_n$. Тогда при таких n выполнена оценка $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$, что означает сходимость.

Лемма доказана.

Определение. Интегралом Лебега от простой функции f вида $(*)$ называется число

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu E_k.$$

Если в рассуждениях встречаются сразу несколько интегралов разных типов, перед интегралом Лебега можно поставить знак (L).

Прежде всего, проверим, что это определение корректно, то есть не зависит от представления функции в виде суммы. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{E_k}(x) = \sum_{j=1}^{J} b_j \chi_{F_j}(x),$$

где $\bigsqcup_k E_k = \bigsqcup_j F_j = X$. Поскольку значения функции f суть, с одной стороны, a_k, а с другой стороны, b_j, то $a_k = b_j$, как только $E_k \cap F_j \neq \varnothing$. Поэтому

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{K} a_k \mu E_k = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} a_k \mu(E_k \cap F_j) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_{j=1}^{J} b_j \mu F_j,$$

то есть суммы равны.

Установим необходимые для дальнейшего свойства интегралов от простых функций.

Лемма 7.2. *Если f и g — простые функции, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то функция $\alpha f + \beta g$ — простая и*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f\,d\mu + \beta \int\limits_X g\,d\mu.$$

Доказательство.

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{E_k}(x), \qquad g(x) = \sum_{j=1}^{J} b_j \chi_{F_j}(x),$$

где $\bigsqcup_k E_k = \bigsqcup_j F_j = X$. Положим $B_{k,j} = E_k \cap F_j$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} a_k \chi_{B_{k,j}}(x), \qquad g(x) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} b_j \chi_{B_{k,j}}(x).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (\alpha a_k + \beta b_j) \chi_{B_{k,j}}(x),$$

и это простая функция по определению. Тогда

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (\alpha a_k + \beta b_j) \mu B_{k,j} = \alpha \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} a_k \mu B_{k,j} + \beta \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_j \mu B_{k,j}.$$

В силу двух предыдущих формул слева здесь стоит интеграл от линейной комбинации, а справа — линейная комбинация интегралов. Лемма доказана.

Лемма 7.3. *Для любой простой функции*

$$\left| \int\limits_X f(x)\,d\mu \right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\,d\mu.$$

Если простая функция ограничена по модулю величиной M и отлична от нуля лишь на множестве E, то

$$\left| \int\limits_X f(x)\,d\mu \right| \leqslant M \mu E.$$

Доказательство.
Первое утверждение немедленно следует из того, что модуль суммы не превосходит суммы модулей, а второе — из оценки

$$\sum_{k=1}^{K} |a_k| \mu E_k \leqslant M \sum_{k=1}^{K} \mu E_k \leqslant M \mu E.$$

Лемма 7.4. *Для любых простых функций* $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \leqslant h(x)$ *выполнено*

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu \geqslant 0, \qquad \int\limits_X g(x)\, d\mu \leqslant \int\limits_X h(x)\, d\mu.$$

Доказательство.
Первое утверждение немедленно следует из определения простой функции. Второе вытекает из первого и леммы 7.2 о линейности интеграла.

Определение. Интегралом от простой функции $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k \chi_{E_k}(x)$ по произвольному множеству $A \in M$ называется величина

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{K} a_k \mu(E_k \cap A).$$

Поскольку его можно рассматривать как интеграл по единице суженной σ-алгебры $M|_A$, то все перечисленные свойства сохраняются.

Лемма 7.5. *Пусть* f *— простая,* $A = \bigsqcup_j A_j$ *— конечное или счетное объединение,* $A_j \in M$. *Тогда*

$$\int\limits_A f\, d\mu = \sum_j \int\limits_{A_j} f\, d\mu.$$

Доказательство.
Лемма следует из определений интеграла от простой функции и σ-аддитивной меры:

$$\int\limits_A \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_j a_k \mu(E_k \cap A_j) = \sum_j \int\limits_{A_j} \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}\, d\mu.$$

Теорема 7.1. *Пусть функции* g *и* g_n *— простые неотрицательные, последовательность* $\{g_n(x)\}$ *— неубывающая в каждой точке и* $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \geqslant g(x)$ *в каждой точке. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\, d\mu \geqslant \int\limits_X g(x)\, d\mu.$$

Доказательство.

Если предел интегралов бесконечен, то утверждение тривиально. Пусть этот предел конечен. Рассмотрим функцию g, пусть она имеет вид

$$g(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x).$$

где $0 < a_1 < \cdots < a_m$. Пусть $\varepsilon \in (0, a_1)$. Введем множество $F = \{x : g(x) > 0\}$, $F_n = \{x \in F : g_n(x) < g(x) - \varepsilon\}$. Поскольку $F = \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k$, то по определению простой функции $\mu F < \infty$. Тогда в силу монотонности последовательности функций

$$F \supset F_1 \supset F_2 \cdots \supset F_n \supset \dots,$$

и так как в каждой точке предел $\{g_n(x)\}$ не меньше, чем $g(x)$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$, откуда по свойству непрерывности меры сверху получаем, что $\mu F_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по лемме 7.5 при каждом n

$$\int\limits_X g(x)\,d\mu = \int\limits_{F_n} g(x)\,d\mu + \int\limits_{F \setminus F_n} g(x)\,d\mu \leqslant a_m \mu F_n + \int\limits_{F \setminus F_n} (g_n(x) + \varepsilon)\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant a_m \mu F_n + \int\limits_F g_n(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(F) \leqslant a_m \mu F_n + \int\limits_X g_n(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(F).$$

С увеличением n первое слагаемое стремится к нулю, а второе — к пределу интегралов. Третье же можно заранее сделать сколь угодно малым, уменьшая ε. Теорема доказана.