Лекция 5 по функциональному анализу 29 сентября 2020 года, мехмат, 3 курс, 3 поток.

Тема 4: Меры на полукольцах и кольцах.

Определение. Пусть S — полукольцо. Функция $m : S \to [0; +\infty)$ называется мерой, если для любых множеств $A, A_1, \ldots, A_n \in S$, для которых $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, выполнено равенство $m(A) = \sum_{k=1}^n m(A_k)$.

Определение. Пусть S — полукольцо. Мера m на S называется σ-аддитивной, если для любых множеств $A, A_1, A_2 \ldots, \in S$, для которых $A = \bigsqcup_{k=1}^\infty A_k$, выполнено равенство $m(A) = \sum_{k=1}^\infty m(A_k)$.

Замечание. Наряду с определенными выше конечными мерами мы будем рассматривать и так называемые бесконечные меры, которым разрешается принимать значение $+\infty$. При этом конечная сумма равна $+\infty$, если хотя бы одно слагаемое в ней бесконечно, а сумма ряда равна $+\infty$, если ряд расходится или если хотя бы один член его бесконечен.

Примеры.

1. Длина промежутков, площадь прямоугольников и вообще стандартная (классическая) мера на ограниченных промежутках в $\mathbb{R}^n$. Промежутком в $\mathbb{R}^n$ здесь и далее называется декартово произведение n промежутков на прямой.

В теореме 4.6 мы докажем её σ-аддитивность.

2. Длина промежутков, площадь прямоугольников и вообще стандартная (классическая) мера на любых промежутках в $\mathbb{R}^n$. Это — пример меры, принимающей бесконечные значения.

3. Меры Стильтьеса на полукольцах полуинтервалов. Для неубываюшей непрерывной слева функции φ полагаем $m_\varphi[a, b) = \varphi(b) - \varphi(a)$. Доказательство их σ-аддитивности предоставляется в качестве задачи для разбора на семинарах.

4. Дискретные меры. Мера задается на σ-алгебре всех подмножеств произвольного множества X. В X берется не более чем счетное подмножество $\{x_k\}$ и для каждого k выбирается положительное a_k. Полагаем

$$mA = \sum_{k\,:\,x_k \in A} a_k.$$

σ-аддитивность следует из того, что можно переставлять и группировать члены абсолютно сходящегося ряда как угодно.

Продолжение на порожденное кольцо.

Теорема 4.1. *Мера на полукольце S единственным образом продолжается до меры на порожденном кольце $R(S)$.*

Доказательство.

Так как продолжение должно быть мерой, то для множества $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in S$, мера может равняться только сумме их мер. Докажем, что это корректное доопределение функции m на $R(S)$. Пусть у множества A есть два разложения на элементы S:

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{j=1}^{s} B_j.$$

Положим $C_{k,j} = A_k \cap B_j$. Тогда $C_{k,j} \in S$ и

$$\sum_{k=1}^{n} mA_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} mC_{k,j} = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} mC_{k,j} = \sum_{j=1}^{s} mB_j.$$

Проверим, что так доопределенная функция m является мерой. Если $B = \bigsqcup_{j=1}^{s} B_j$, где $B, B_j \in R(S)$, то существуют представления $B_j = \bigsqcup_{k=1}^{k_j} A_{j,k}$, где $A_{j,k} \in S$. При этом $mB_j = \sum_{k=1}^{k_j} mA_{j,k}$. Но равенство $B = \bigsqcup_{j=1}^{s} \bigsqcup_{k=1}^{k_j} A_{j,k}$ является одним из возможных представлений B в виде объединения элементов S. Отсюда сразу следует, что $mB = \sum_{j=1}^{s} mB_j$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Если мера на полукольце S σ-аддитивна, то продолженная мера на порожденном кольце $R(S)$ тоже σ-аддитивна.*

Доказательство.

Пусть $A \in R(S)$, $B_n \in R(S)$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Согласно определению порожденного кольца, найдутся такие A_j и $B_{n,i}$ из S, что

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{J} A_j, \quad B_n = \bigsqcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}.$$

Множества $C_{n,i,j} = A_j \cap B_{n,i}$ принадлежат S и попарно не пересекаются. По определению продолжения меры

$$mA = \sum_{j=1}^{J} mA_j, \quad mB_n = \sum_{i=1}^{i_n} mB_{n,i},$$

а в силу σ-аддитивности меры на S

$$mA_j = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{i_n} mC_{n,i,j}, \quad mB_{n,i} = \sum_{j=1}^{J} mC_{n,i,j}.$$

Переставляя и группируя слагаемые в абсолютно сходящихся рядах, получим, что

$$mA = \sum_{n=1}^{\infty} mB_n.$$

Свойства мер.

Теорема 4.3. *Пусть m — мера на полукольце S.*

(А) Если дан не более чем счетный набор попарно непересекающихся множеств $\{A_k\}$, $A_k \in S$, которые вложены в $A \in S$, то $\sum\limits_{k} mA_k \leqslant mA$.

(Б) Если $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, то $mA \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} mA_k$.

Доказательство.

(А) Если дан конечный набор множеств $\{A_k\}_{k=1}^n$, то по лемме 3.1 в S найдутся такие множества $\{A_k\}_{k=n+1}^s$, что $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{s} A_k$. Тогда по определению меры

$$mA = \sum_{k=1}^{s} mA_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} mA_k.$$

Случай счетного набора множеств получается предельным переходом: если любая частная сумма ряда $\sum\limits_k mA_k$ не превосходит mA, то и сумма всего ряда не превосходит mA.

(Б) Применим к множествам $A, A_1, \ldots, A_n$ лемму 3.2, то есть найдем такие попарно непересекающиеся $\{B_j\}_{j=1}^s$ из S, что

$$A = \bigsqcup_{j\in M_0} B_j, \qquad A_k = \bigsqcup_{j\in M_k} B_j,$$

где M_k — некоторые подмножества в $\{1, 2, \ldots, s\}$. Так как A_k покрывают A, то каждое $j \in M_0$ содержится и хотя бы в одном из M_k, $k > 0$. Поэтому

$$mA = \sum_{j\in M_0} mB_j \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in M_k} mB_j = \sum_{k=1}^{n} mA_k.$$

Теорема доказана.

Для счетных покрытий свойство (Б) выполнено лишь для σ-аддитивных мер.

Теорема 4.4. *Пусть m — мера на полукольце S.*

(А) Если для любого разбиения $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ множества $A \in S$ на множества $A_n \in S$

$$\sum_{k=1}^{\infty} mA_k \geqslant mA,$$

то m σ-аддитивна.

(Б) Если мера σ-аддитивна, то для любых A и A_n из S, удовлетворяющих условию $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, выполнено неравенство

$$mA \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} mA_k.$$

Доказательство.

(А) Пусть мера удовлетворяет указанному условию. Рассмотрим разбиение $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда в силу пункта (А) теоремы 4.3 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} mA_k \leqslant mA,$$

а по условию выполнено и обратное, то есть мера σ-аддитивна по определению.

(Б) Обратно, пусть мера m σ-аддитивна. Рассмотрим ее продолжение на порожденное кольцо $R(S)$ — оно σ-аддитивно по теореме 4.2. Пусть $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k, \text{ где } B_k = A \cap \left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right) \in R(S).$$

Поскольку $B_k \subseteq A_k$, то

$$mA = \sum_{k=1}^{\infty} mB_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} mA_k.$$

Теорема доказана.

Определение. Мера m на полукольце S называется непрерывной снизу, если для любых множеств $A, A_n \in S$, для которых $A_n \subset A_{n+1}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, выполнено равенство $mA = \lim\limits_{n\to\infty} mA_n$.

Определение. Мера m на полукольце S называется непрерывной сверху, если для любых множеств $A, A_n \in S$, для которых $A_n \supset A_{n+1}$ и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, выполнено равенство $mA = \lim\limits_{n\to\infty} mA_n$.

Теорема 4.5. *Мера на кольце R σ-аддитивна тогда и только тогда, когда она непрерывна снизу.*

Доказательство.
Пусть мера m σ-аддитивна и дана последовательность расширяющихся множеств $\{A_n\}$ из R. Положим $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Тогда $B_n \in R$ и

$$A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k, \qquad A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

и в силу свойств меры и определения суммы ряда

$$mA = \sum_{k=1}^{\infty} mB_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} mB_k = \lim_{n\to\infty} mA_n.$$

Обратно, пусть мера непрерывна и

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Положим $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$ и аналогично получим, что

$$mA = \lim_{n\to\infty} mA_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} mB_k = \sum_{k=1}^{\infty} mB_k.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть мера m σ-аддитивна на кольце R, и даны множества $A_k \in R$, для которых $A_k \supseteq A_{k+1}$ и $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in R$, причем $mA_1 < +\infty$. Тогда $mA = \lim\limits_{n\to\infty} mA_n$.*

Доказательство.
Положим $B_n = A_1 \setminus A_n \in R$. Тогда $B_n \subseteq B_{n+1}$ и $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_k = A_1 \setminus A \in R$. Применим теорему к множествам B_k и заметим, что

$$mB_k = mA_1 - mA_k, \qquad mB = mA_1 - mA.$$

Следствие доказано.

Следствие. *Если σ-аддитивная мера на кольце принимает только конечные значения, то она непрерывна сверху.*

Стандартная мера в n-мерном пространстве.

Пусть S — полукольцо всех промежутков в $\mathbb{R}^n$ (параллелепипедов с ребрами, параллельными координатным осям). В качестве меры m_n возьмем n-мерный объем, то есть за меру промежутка возьмем произведение длин его непараллельных ребер. Аддитивность функции m_n в одномерном случае очевидна (конечный набор промежутков можно упорядочить по расположению слева направо), а в многомерном случае будет следовать из общего утверждения о произведении мер, которое мы докажем позднее.

Теорема 4.6. *Стандартная мера на $\mathbb{R}^n$ σ-аддитивна.*

Доказательство.
Воспользуемся теоремой 4.4 (А). Пусть выбраны такие промежутки, что

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

Рассмотрим сначала случай, когда A — ограниченный промежуток. Тогда все A_k тем более ограничены. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такой замкнутый промежуток $B \subset A$, что $m_nA - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant m_nB \leqslant m_nA$. Выберем такие открытые промежутки $B_k \supset A_k$, что $m_nA_k \leqslant m_nB_k \leqslant m_nA_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Тогда из покрытия

$$B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

можно выбрать конечное подпокрытие:

$$B \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} B_k.$$

В силу теоремы 4.3(Б) тогда

$$m_nA - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant m_nB \leqslant \sum_{k=1}^{p} m_nB_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_nA_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

то есть

$$m_nA \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_nA_k + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} m_nA_k + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда получаем, что

$$m_nA \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_nA_k,$$

то есть в этом случае условие теоремы 4.4(A) выполнено.

Пусть теперь промежуток A не ограничен. Возможен случай, когда $m_n A = 0$, но тогда и $m_n A_k = 0$ при всех k. Остается случай, когда $m_n A = \infty$. При этом условие теоремы 4.4(A) будет нарушено лишь при $\sum_{k=1}^{\infty} m_n A_k = S_0 < \infty$.

Положим $P_N = [-N, N]^n$. Заметим, что $m_n(A \cap P_N) \to m_n A = \infty$ при $N \to \infty$. Выберем N столь большим, что $m_n(A \cap P_N) > S_0$. Тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_n(A_k \cap P_N) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_n A_k = S_0 < m_n(A \cap P_N),$$

что противоречит уже разобранному случаю, поскольку

$$A \cap P_N = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap P_N),$$

и в этом равенстве все промежутки ограничены. Теорема доказана.