ЗАДАНИЕ 9 ФА. Пространства обобщенных функций

Определения.

1) Пространства обобщенных функций $E'(\mathbf{R})$, $S'(\mathbf{R})$ и $D'(\mathbf{R})$ – это пространства линейных непрерывных функционалов на $E(\mathbf{R})$, $S(\mathbf{R})$, и $D(\mathbf{R})$, соответственно. Непрерывность здесь понимается в том смысле, что если $X(\mathbf{R})$ – одно из перечисленных выше пространств основных функций, последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset X(\mathbf{R})$ и $f_n \to f$ в $X(\mathbf{R})$, то для любой $\varphi \in X'(\mathbf{R})$ числовая последовательность $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ при $n \to \infty$.

2) Если последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'(\mathbf{R})$ и $\varphi \in X'(\mathbf{R})$, то говорят, что $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в $X'(\mathbf{R})$, если для любой $f \in X(\mathbf{R})$ числовая последовательность $\varphi_n(f) \to \varphi(f)$ при $n \to \infty$.

Задачи.

1. Пусть функция $f(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, т.е. для любого $k > 0$ функция $f(x) \in L_1([-k,k])$ и для любой $g(x) \in D(\mathbf{R})$ функционал

$$\varphi(g) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)g(x)d\,x.$$

$\varphi \in D'(\mathbf{R})$. Такие обобщенные функции в дальнейшем будем называть регулярными (или, более подробно, регулярными,соответствующими f). Для некоторых f такие обобщенные функции могут принадлежать и пространствам $S'(\mathbf{R})$ или $E'(\mathbf{R})$.

2. Доказать, что $E'(\mathbf{R}) \subseteq S'(\mathbf{R}) \subseteq D'(\mathbf{R})$.

3. Доказать, что в задаче 1 оба вложения строгие.

4. Пусть функции $f(x), g(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ и порождают одну и ту же обобщенную функцию $\varphi \in D'(\mathbf{R})$. Доказать, что $f(x) = g(x)$ почти всюду на $\mathbf{R}$.

5. Пусть при любой $f(t) \in E(\mathbf{R})$ $\delta(f) = f(0)$. Доказать, что $\delta \in E'(\mathbf{R})$, но не является регулярной.

6. Пусть последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\mathbf{R})$, функция $f(t) \in C(\mathbf{R})$ и для любого $t \in \mathbf{R}$ числовая последовательность $f_n(t) \to f(t)$. Верно ли, что для соответствующих регулярных обобщенных функций $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в $D'(\mathbf{R})$?

7. Пусть функция $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Каким пространствам обобщенных функций принадлежит соответствующая f регулярная обобщеннвя функция?

8. Пусть функционал $P(\frac{1}{x})$ действует на $D(\mathbf{R})$ так:

$$P(\frac{1}{x})(f) = v.p. \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{f(x)}{x} d\,x \equiv \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int\limits_{\mathbf{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{f(x)}{x} d\,x.$$

Доказать, что $P(\frac{1}{x}) \in D'(\mathbf{R})$.

9. Доказать, что обобщенная функция $P(\frac{1}{x})$ из задачи 8 не является регулярной.

10. Пусть функционал $P(\frac{1}{|x|})$ действует на $D(\mathbf{R})$ так:

$$P(\frac{1}{|x|})(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x) - f(0)}{|x|} d\,x + \int\limits_{\mathbf{R} \setminus [-1,1]} \frac{f(x)}{|x|} d\,x.$$

Доказать, что $P(\frac{1}{|x|}) \in D'(\mathbf{R})$.