Задание 8 ФА. Пространства основных функций (продолжение)

1) Сходится ли в $E(\mathbf{R})$ последовательность $\{\frac{nt}{n^2+t^2}\}_{n=1}^{\infty}$?

2) Сходится ли в $E(\mathbf{R})$ последовательность $\{\frac{n^3t^2}{(1+n^2t^2)^2}\}_{n=1}^{\infty}$?

3) Сходится ли в $E(\mathbf{R})$ последовательность $\{e^{-nt^2}\}_{n=1}^{\infty}$?

4) Сходится ли в $E(\mathbf{R})$ последовательность $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}\}_{n=1}^{\infty}$?

5) Привести пример последовательности функций из $D(\mathbf{R})$, которая сходится в $E(\mathbf{R})$, но не сходится в $S(\mathbf{R})$.

6) Привести пример последовательности функций из $D(\mathbf{R})$, которая сходится в $S(\mathbf{R})$, но не сходится в $D(\mathbf{R})$.

7) Доказать, что если $f(x) \in D(\mathbf{R})$ и

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)d\,x = 0,$$

то существует первообразная, т. е. такая функция $F(x) \in D(\mathbf{R})$, что $F'(x) = f(x)$.

8) Доказать, что если $f(x) \in D(\mathbf{R})$ и $f(0) = 0$, то ее можно представить в виде $f(x) = xg(x)$, где $g(x) \in D(\mathbf{R})$.

9) Доказать, что оператор дифференцирования непрерывен (в смысле сохранения сходимости) в любом из пространств $E(\mathbf{R})$, $S(\mathbf{R})$ и $D(\mathbf{R})$.

10) Пусть функция $a(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$. В каких из пространств $E(\mathbf{R})$, $S(\mathbf{R})$ и $D(\mathbf{R})$ оператор умножения на $a(x)$ непрерывен, какова бы ни была $a(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$?