ЗАДАНИЕ 7 ФА. Пространства основных функций

Определения.

1) Пространство $E(\mathbf{R})$ – это полинормированное пространство, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$, сходимость в котором определяется полунормами

$$p_{n,l}(f) = \max_{x\in[-n,n]} |f^{(l)}(x)|,$$

где $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $n \in N$.

2) Пространство $S(\mathbf{R})$ – это полинормированное пространство, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$ таких, что все полунормы

$$p_{n,l}(f) = \max_{x\in\mathbf{R}} |x^n f^{(l)}(x)| < \infty,$$

где $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$. Эти полунормы и задают сходимость.

3) Пространство $D(\mathbf{R})$ – это линейное пространство, состоящее из бесконечно дифференцируемых финитных функций на $\mathbf{R}$ (функция называется финитной, если она обращается в ноль вне некоторого отрезка). Если последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset D(\mathbf{R})$ и $f(t) \in D(\mathbf{R})$, то говорят, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

в $D(\mathbf{R})$, если найдется такой компакт $K \subset \mathbf{R}$, что носители всех функций f_n и функции f лежат в K и при любом $l = 0, 1, 2, \ldots$ функции $f_n^{(l)}(t)$ равномерно сходятся к $f^{(l)}(t)$ на прямой.

Аналогичные определения даются и для пространств гладких функций на $\mathbf{R}^n$, $n > 1$.

Задачи.

1. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на прямой .

2. Используя результат задачи 1, построить ненулевую функцию из $D(\mathbf{R})$.

3. Для произвольного $\delta > 0$ построить функцию $\varphi_\delta(x) \in D(\mathbf{R})$ такую, что $\varphi_\delta(x) = 1$ при $x \in [-1, 1]$, $\varphi_\delta(x) = 0$ при $x \notin [-1-\delta, 1+\delta]$ и $0 \leq \varphi_\delta(x) \leq 1$ при всех x.

4. Доказать, что функции из $D(\mathbf{R})$ всюду плотны в $L(\mathbf{R})$.

5. Доказать, что пространства $E(\mathbf{R})$ и $S(\mathbf{R})$ метризуемы, т.е. что сходимость в этих пространствах, определяемая полунормами, эквивалентна сходимости по некоторой метрике.

6. Доказать, что пространство $D(\mathbf{R})$ неметризуемо.

7. Привести примеры функций из $E(\mathbf{R}) \setminus S(\mathbf{R})$ и из $S(\mathbf{R}) \setminus D(\mathbf{R})$.

8. Каким из перечисленных выше трех пространств принадлежит функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0? \end{cases}$$

9. Сходится ли последовательность $\{xe^{-nx^2}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $S(\mathbf{R})$?

10. Пусть ненулевая функция $f(x) \in D(\mathbf{R})$. Какие из перечисленных последовательностей

а) $\{\frac{1}{n^2}f(nx)\}_{n=1}^{\infty}$; б) $\{\frac{1}{n}f(n+x)\}_{n=1}^{\infty}$; в) $\{\frac{1}{n}f(\frac{x}{n})\}_{n=1}^{\infty}$

сходятся в $f(x) \in D(\mathbf{R})$?