

ЗАДАНИЕ 14. Преобразование Фурье обобщенных функций

Здесь будем считать, что преобразование Фурье функций из $S(\mathbf{R})$ задается формулой

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) e^{-ixt} dx.$$

Если обобщенная функция $f \in S'(\mathbf{R})$, то ее преобразованием Фурье называется обобщенная функция $F(f)$, действующая по формуле

$$F(f)(\varphi) = f(\hat{\varphi})$$

при всех $\varphi \in S(\mathbf{R})$. Основные свойства:

- 1) $F(f(x-a)) = e^{-iat} F(f)$.
- 2) $(F(f))' = -iF(xf)$.
- 3) $F(f') = itF(f)$.
- 4) $F^2(f(x)) = f(-x)$.

1. Найти $F(\delta(x))$.
2. Найти $F((\delta)'(x))$.
3. Найти $F(1(x))$ (здесь $1(x)$ – регулярная обобщенная функция, соответствующая единице).
4. Найти $F(x)$ (здесь x – регулярная обобщенная функция, соответствующая x).
5. Найти $F(P(\frac{1}{x}))$.
6. Найти $F(\text{sign}(x))$.
7. Найти $F(\theta(x))$, где $\theta(x)$ – это регулярная обобщенная функция, соответствующая

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

8. Найти $F(e^{-iax})$, где $a > 0$.
9. Найти $F(\sin ax)$, где $a > 0$.
10. Найти $F(\cos ax)$, где $a > 0$.