

ЗАДАНИЕ 13. Преобразование Фурье

Если функция $f(x) \in L(\mathbf{R})$, то ее преобразованием Фурье называется функция

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ixt} dx.$$

1. Доказать, что $\hat{f}(x) \in C(\mathbf{R})$.
2. Доказать, что $\hat{f}(x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.
3. Доказать, что если $(|x|+1)f(x) \in L(\mathbf{R})$, то ее преобразование Фурье дифференцируемо в каждой точке и $(\hat{f})'(t) = -i(x\hat{f})(t)$.
4. Доказать, что если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке и $f'(x) \in L(\mathbf{R})$, то $\hat{f}'(t) = it\hat{f}(t)$.
5. Найти $\widehat{e^{-a|x|}}(t)$, где $a > 0$.
6. Найти $\widehat{X_{[-a,a]}}(t)$, где $a > 0$.
7. Найти $\widehat{\frac{\sin ax}{x}}(t)$, где $a > 0$. В этом случае, функция $\frac{\sin ax}{x} \notin L(\mathbf{R})$, но преобразование Фурье существует, как несобственный интеграл Римана.
8. Найти $\widehat{\frac{1}{x^2+a^2}}(t)$, где $a > 0$.
9. Найти $\widehat{\frac{1-\cos ax}{x^2}}(t)$, где $a > 0$.
10. Найти $\widehat{e^{-ax^2}}(t)$, где $a > 0$.