

ЗАДАНИЕ 11 ФА. Операции над обобщенными функциями

Определения.

1) Пусть $X'(\mathbf{R})$ – это любое из пространств $E'(\mathbf{R})$, $S'(\mathbf{R})$ и $D'(\mathbf{R})$ и обобщенная функция $f(x) \in X'(\mathbf{R})$. Тогда ее производной $f'(x)$ называется обобщенная функция из $X'(\mathbf{R})$, действующая по формуле $f'(\varphi) = -f(\varphi')$ для любой $\varphi(x) \in X(\mathbf{R})$. Найти производную означает указать обобщенную функцию $G(x) \in X'(\mathbf{R})$ такую, что $f'(\varphi) = G(\varphi)$ для любой $\varphi(x) \in X(\mathbf{R})$.

2) Пусть $X'(\mathbf{R})$ – это любое из пространств $E'(\mathbf{R})$ и $D'(\mathbf{R})$, обобщенная функция $f(x) \in X'(\mathbf{R})$ и функция $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$. Тогда произведением $a(x)f(x)$ называется обобщенная функция из $X'(\mathbf{R})$, действующая по формуле $af(\varphi) = f(a\varphi)$ для любой $\varphi(x) \in X(\mathbf{R})$. Если $a(x)$ растет не быстрее полинома, произведение определено и в $S'(\mathbf{R})$.

Задачи.

1. Пусть $\theta(x)$ – это регулярная обобщенная функция, соответствующая

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

В $D'(\mathbf{R})$ найти θ' .

2. Пусть $\sqrt{x_+}$ – это регулярная обобщенная функция, соответствующая

$$\sqrt{x_+} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

В $D'(\mathbf{R})$ найти $(\sqrt{x_+})'$.

3. Пусть $\frac{1}{\sqrt{x_+}}$ – это регулярная обобщенная функция, соответствующая

$$\frac{1}{\sqrt{x_+}} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

В $D'(\mathbf{R})$ найти $(\frac{1}{\sqrt{x_+}})'$.

4. Пусть $\ln x_+$ – это регулярная обобщенная функция, соответствующая

$$\ln x_+ = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \ln x & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

- В $D'(\mathbf{R})$ найти $(\ln x_+)'$.
5. В $D'(\mathbf{R})$ найти $(P(\frac{1}{x}))'$.
 6. В $D'(\mathbf{R})$ найти $(\ln |x|)'$.
 7. В $D'(\mathbf{R})$ найти $(x\delta(x))'$.
 8. В $D'(\mathbf{R})$ найти $(x\delta'(x))'$.
 9. В $D'(\mathbf{R})$ решить уравнение $xf(x) = 0$.
 10. В $D'(\mathbf{R})$ решить уравнение $\sin xf(x) = 0$.