ЗАДАНИЕ 10 ФА. Сходимость обобщенных функций

Определение.

Если последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'(\mathbf{R})$ и $\varphi \in X'(\mathbf{R})$, то говорят, что $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в $X'(\mathbf{R})$, если для любой $f \in X(\mathbf{R})$ числовая последовательность $\varphi_n(f) \to \varphi(f)$ при $n \to \infty$. Аналогично определяется сходимость семейств обобщенных функций.

Задачи.

1. Доказать, что
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = P(\frac{1}{x})$$
в $D'(\mathbf{R})$. Здесь и ниже: если $f(x)$ локально интегрируемая функция, то через $f(x)$ мы будем также обозначать регулярную обобщенную функцию, действующую как
$$\varphi(g) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x) g(x) d\, x.$$

2. Доказать, что
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(x)$$
в $D'(\mathbf{R})$.

3. Доказать формулу Сохоцкого:
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = P(\frac{1}{x}) - i\pi\delta(x)$$
в $D'(\mathbf{R})$. Здесь i – мнимая единица.

4. Найти в $D'(\mathbf{R})$
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}.$$

5. Найти в $D'(\mathbf{R})$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin nx}{x}.$$

6. Найти в $D'(\mathbf{R})$
$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n,$$

где
$$\varphi_n(g) = v.p.\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\cos nx}{x} g(x)d\,x.$$

7. Пусть неотрицательная функция $f(x) \in L(\mathbf{R})$ и
$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)d\,x = 1.$$

Доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} nf(nx) = \delta(x)$$
в $D'(\mathbf{R})$.

8. Найти в $D'(\mathbf{R})$
$$\lim_{n\to\infty} n(\delta(x-\frac{1}{n}) - \delta(x)),$$
где
$$\delta(x-a)(g) = g(a).$$

9. Найти при фиксированном целом неотрицательном k в $D'(\mathbf{R})$
$$\lim_{n\to\infty} \delta^{(k)}(x-n),$$
где
$$\delta^{(k)}(x-n)(g) = (-1)^k g^{(k)}(n).$$

10. Найти в $D'(\mathbf{R})$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta^{(k)}(x-k).$$