ЗАДАНИЕ 9

1. Пусть последовательность неотрицательных измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к $f(x)$ на некотором измеримом A. Доказать, что $f(x) \geq 0$ почти всюду на A (задача 9.25).

2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$, μ – классическая мера Лебега. Доказать, что

$$\int\limits_{(0,1)} f(x) d\,\mu = \infty,$$

используя только определение интеграла Лебега (задача 10.11).

3. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, μ – классическая мера Лебега. Доказать, что

$$\int\limits_{(0,1)} f(x) d\,\mu = \infty,$$

используя только определение интеграла Лебега (задача 10.12).

4. Пусть функция $f(x)$ измерима на некотором A и $\mu(A) = 0$. Доказать, что $f(x) \in L(A)$ и

$$\int\limits_{A} f(x) d\,\mu = 0$$

(задача 10.18).

5. Пусть функция $f(x)$ измерима на некотором A. Доказать, что $f(x) \in L(A)$ тогда и только тогда, когда $|f(x)| \in L(A)$ (задача 10.24).

6. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на некотором A, $f(x) \in L(A)$ и $|g(x)| \leq |f(x)|$ при $x \in A$. Доказать, что тогда $g(x) \in L(A)$ (задача 10.26).

7. Пусть функции $f(x) \in L(A)$ и $g(x) \in L(A)$, а функция $h(x) = \max(f(x), g(x))$ при $x \in A$. Доказать, что тогда $h(x) \in L(A)$ (задача 10.50).

8. Пусть функция $f(x) \geq 0$ на некотором A, $f(x) \in L(A)$ и при $\lambda > 0$ множество $A_\lambda = \{x \in A : f(x) > \lambda\}$. Доказать, что

$$\mu(A_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int\limits_{A} f(x) d\,\mu$$

(неравенство Чебышева, задача 10.51).

9. Пусть функция $f(x) \geq 0$ на некотором A, $f(x) \in L(A)$ и

$$\int\limits_A f(x) d\,\mu = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0$ почти всюду на A (задача 10.52).

10. Пусть функция $f(x) \in L(A)$ и для любого $B \in M$, $B \subseteq A$ имеем

$$\int\limits_B f(x) d\,\mu = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0$ почти всюду на A (задача 10.53).

11. Используя пример Рисса и теорему Рисса, доказать, что сходимость почти всюду на $[0, 1]$ нельзя задать с помощью какой-либо метрики (задача 13.31).

12. Пусть функция $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега и конечна на $[0, 1]$. Доказать, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется функция $g_\varepsilon(x) \in C([0, 1])$ такая, что

$$\mu\left(\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}\right) < \varepsilon.$$

(теорема Лузина, указание: использовать лемму 13.1 из лекции 8, наличие внутри любого измеримого множества замкнутого множества сколь угодно близкой меры и теорему Егорова) (задача 9.31).