ЗАДАНИЕ 8

1. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv Q \cap [0,1]$. Доказать, что последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = r_n; \\ \frac{1}{\sqrt{n}(x-r_n)} & \text{при } x \in [0,1] \setminus \{r_n\}, \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ сходится по классической мере Лебега на $[0,1]$ (задача 9.21).

2. Пусть $\{r_n = \frac{p_n}{q_n}\}_{n=1}^{\infty} \equiv Q \cap [0,1]$. Доказать, что последовательность $\{e^{-(p_n - q_n x)^2}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по классической мере Лебега на $[0,1]$ (задача 9.23).

3. Доказать, что последовательность, определенная в задаче 2, расходится в каждой точке отрезка $[0,1]$ (задача 9.24).

4. Доказать, что последовательность $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится по классической мере Лебега на $[0,1]$ (задача 9.20).

5. Пусть функция $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега и конечна на $[-1,1]$. Доказать, что последовательность $\{f(x - \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по классической мере Лебега на $[0,1]$ к функции $f(x)$ (задача 9.35).

6. Пусть двойная последовательность $\{f_{n,k}(x)\}_{n,k=1}^{\infty}$, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и функция $f(x)$ таковы, что все функции измеримы относительно классической меры Лебега, для любого n имеем $f_{n,k}(x) \overset{\mu}{\rightrightarrows} f_n(x)$ при $k \to \infty$ на $[0,1]$, где μ – классическая мера Лебега, и $f_n(x) \overset{\mu}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$ на $[0,1]$. Доказать, что существует возрастающая последовательность $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $f_{n,k_n}(x) \overset{\mu}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$ на $[0,1]$. (задача 9.37).

7. Пусть двойная последовательность $\{f_{n,k}(x)\}_{n,k=1}^{\infty}$, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и функция $f(x)$ таковы, что все функции измеримы относительно классической меры Лебега, для любого n имеем $f_{n,k}(x) \to f_n(x)$ при $k \to \infty$ почти всюду на $[0,1]$ и $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ почти всюду на $[0,1]$. Доказать, что существует возрастающая последовательность $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $f_{n,k_n}(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ почти всюду на $[0,1]$. (задача 9.38).

8. Построить двойную последовательность $\{f_{n,k}(x)\}_{n,k=1}^{\infty}$, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и функцию $f(x)$ такие, что все функции измеримы

относительно классической меры Лебега, для любого n имеем $f_{n,k}(x) \to f_n(x)$ при $k \to \infty$ всюду на $[0,1]$ и $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ всюду на $[0,1]$, но для любой возрастающей последовательности $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность $\{f_{n,k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится на непустом подмножестве $[0,1]$. (задача 9.39).

9. Построить такой ряд из полиномов

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x),$$

что для любой функции $f(x) \in C([0,1])$ найдется возрастающая последовательность $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой частичные суммы

$$\sum_{k=1}^{k_n} P_k(x)$$

равномерно сходятся к $f(x)$ на $[0,1]$ при $n \to \infty$ (задача 9.40).

10. Пусть $f(x)$ измеримая и конечная относительно классической меры Лебега на $[0,1]$. Доказать, что существует последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых и конечных функций, каждая из которых принимает не более счетного числа значений, которая равномерно сходится к $f(x)$ на $[0,1]$ при $n \to \infty$ (задача 9.41).

11. Пусть $f(x)$ измеримая и конечная относительно классической меры Лебега на $[0,1]$. Доказать, что существует последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на $[0,1]$ функций, почти всюду на $[0,1]$ сходящаяся к $f(x)$ (задача 9.34).

12. Пусть определенная на $[0,1]$ функция $f(x)$ такова, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется функция $g_\varepsilon(x) \in C([0,1])$ такая, что

$$\mu\left(\{x \in [0,1] : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Доказать, что $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега и конечна почти всюду на $[0,1]$ (обратная теорема Лузина) (задача 9.33).