ЗАДАНИЕ 7

1. Пусть множество $A \subset [0,1]$ и измеримо относительно классической меры Лебега. Доказать, что функция $f(x) = \mu(A \cap [0,x]) \in C([0,1])$ (задача 7.77).

2. Построить функцию $f(x) \in C([0,1])$ такую, что функция

$$g(t) = \mu(\{x \in [0,1] : f(x) > t\})$$

разрывна.

3. Доказать, что существует $A \subset [0,1]^2$ неизмеримое относительно классической меры Лебега (задача 7.90).

4. Построить множество $A \subset [0,1]^2$, измеримое относительно классической меры Лебега на подмножествах $[0,1]^2$ такое, что обе его проекции на координатные оси неизмеримы относительно одномерной классической меры Лебега (задача 7.94).

5. Построить множество $A \subset [0,1]^2$, неизмеримое относительно классической меры Лебега на подмножествах $[0,1]^2$ такое, что обе его проекции на координатные оси измеримы относительно одномерной классической меры Лебега (задача 7.95).

6. Привести пример множества $A \subset [0,1]$, измеримого относительно классической меры Лебега и множества $B \subset [0,1]$ неизмеримого относительно классической меры Лебега таких, что декартово произведение $A \times B$ измеримо относительно классической меры Лебега на подмножествах $[0,1]^2$ (задача 7.98).

7. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ измеримы относительно классической меры Лебега на подмножествах $[0,1]$ и

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) > n-1.$$

Доказать, что

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0.$$

(задача 7.100)

8. Построить множества $A_1, A_2, ..., A_n$, измеримые относительно классической меры Лебега на подмножествах $[0,1]$ и такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = n-1,$$

но

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset.$$

(задача 7.101)

9. Пусть замкнутое нигде не плотное $F \subset [0,1]$ измеримо относительно классической меры Лебега и $\mu(F) > 0$. Доказать, что F неизмеримо относительно классической меры Жордана (задача 7.71).

10. Изучить построение кривой Кантора (вторая часть параграфа 11 книги "Мера и интеграл") и ее основные свойства.

11. С помощью кривой Кантора доказать существование непрерывной на $[0,1]$ функции $f : [0,1] \to [0,1]$ и измеримой относительно классической меры Лебега функции g на $[0,1]$ таких, что функция $g(f)$ неизмерима относительно классической меры Лебега (в том же параграфе).

12. С помощью кривой Кантора доказать существование неборелевского множества, измеримого относительно классической меры Лебега на $[0,1]$ (в том же параграфе).