ЗАДАНИЕ 6

1. Пусть множество $A \subset [0,1]$ и измеримо относительно классической меры Лебега. Доказать, что оно может быть представлено в виде $A = A_1 \setminus A_2$, где A_1 – множество типа G_δ, а множество A_2 измеримо и имеет меру 0 (задача 7.66).

2. Пусть множество $A \subset [0,1]$ и измеримо относительно классической меры Лебега. Доказать, что оно может быть представлено в виде $A = A_1 \sqcup A_2$, где A_1 – множество типа F_σ, а множество A_2 измеримо и имеет меру 0 (задача 7.65).

3. Пусть множество $A \subset [0,1]$ и измеримо относительно классической меры Лебега. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F и открытое множество G такие, что $F \subseteq A \subseteq G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

4. Доказать, что множество рациональных точек на $[0,1]$ неизмеримо относительно классической меры Жордана (решение задачи 7.28).

5. Пусть множество $A \subset [0,1]$, измеримо относительно классической меры Лебега и $\mu(A) > 0$. Доказать, что его мощность равна c (задача 7.81).

6. Пусть множество $A \subset [0,1]$, измеримо относительно классической меры Лебега и $\mu(A) > 0$. Доказать, что найдутся такие $x, y \in A$, что $x - y$ рационально (задача 7.87).

7. Для заданного $\alpha \in (0,1)$ построить измеримое относительно классической меры Лебега множество $A \subset [0,1]$ такое, что существует

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{\mu(A \cap [0,h])}{h} = \alpha.$$

(задача 7.84)

8. Пусть замкнутое $F \subset [0,1]$ и $\mu(F) = 0$. Доказать, что F измеримо по Жордану.

9. Изучить построение множества Кантора (первая часть параграфа 11 книги "Мера и интеграл") и его основные свойства (мощность c, нигде не плотность, мера 0).

10. Пусть множество A состоит из тех точек отрезка $[0,1]$, в десятичном разложении которых присутствуют и цифра 4, и цифра 5, причем 4 первый раз встречается раньше, чем 5. Доказать, что A измеримо и найти его меру.

11. Пусть $\alpha > 0$ и множество A построено по тому же алгоритму, что и множество Кантора, но отношение длины выбрасываемого на n-том шаге интервала к длмне отрезка, из которого он выбрасывается, равно $\frac{1}{(n+\alpha)^2}$. Найти $\mu(A)$ (задача 7.69).

12. Построить измеримое относительно классической меры Лебега множество $A \subset [0, 1]$ такое, что $\mu(A) = 1$ и

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где все A_n измеримы и нигде не плотны (задача 7.80).