ЗАДАНИЕ 16

1. Построить такую конечную измеримую относительно классической меры Лебега на подмножествах квадрата $[0,1]^2$ функцию $f(x,y) \notin L([0,1]^2)$, что для любого $x_0 \in [0,1]$ функция $f(x_0,y) \in L([0,1])$, для любого $y_0 \in [0,1]$ функция $f(x,y_0) \in L([0,1])$ и для любых $x_0, y_0 \in [0,1]$ верны равенства

$$\int\limits_{[0,1]} f(x_0,y)d\,\mu_y = \int\limits_{[0,1]} f(x,y_0)d\,\mu_x = 0$$

(задача 12.6).

2. Построить такую конечную измеримую относительно классической меры Лебега на подмножествах квадрата $[0,1]^2$ функцию $f(x,y)$, что

$$\int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{[0,1]} f(x,y)d\,\mu_y \right) d\,\mu_x = 1$$

и

$$\int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{[0,1]} f(x,y)d\,\mu_x \right) d\,\mu_y = 0.$$

(задача 12.7).

3. Пусть $a, b \in \mathbf{R}$ и $a \neq b$. Построить такую конечную измеримую относительно классической меры Лебега на подмножествах квадрата $[0,1]^2$ функцию $f(x,y)$, что

$$\int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{[0,1]} f(x,y)d\,\mu_y \right) d\,\mu_x = a$$

и

$$\int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{[0,1]} f(x,y)d\,\mu_x \right) d\,\mu_y = b.$$

(задача 12.8).

4. Пусть функция $f(x,y) = e^{-xy}\sin x \sin y$ при $(x,y) \in (0,\infty)^2$. Доказать, что $f(x,y) \in L((0,\infty)^2)$ (задача 12.9).

5. Пусть функция $f(x,y) = \frac{1}{1+x^4y^4}$ при $(x,y) \in (0,\infty)^2$. Верно ли, что $f(x,y) \in L((0,\infty)^2)$?

6. Пусть функции $f(x), g(x) \in L(\mathbf{R})$. Доказать, что для почти всех $x \in \mathbf{R}$ функция $f(t)g(x-t) \in L(\mathbf{R})$ и функция

$$h(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(t)g(x-t)d\,\mu_t \in L(\mathbf{R})$$

(эту функцию называют сверткой f и g) (задача 12.11).