ЗАДАНИЕ 15

Пусть отрезок $[a,b] \subset \mathbf{R^1}$. Назовем систему интервалов $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ допустимой, если они попарно не пересекаются. Функция $f:[a,b] \to \mathbf{R^1}$ называется абсолютно непрерывной ($f(x) \in AC([a,b])$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой допустимой системы интервалов с

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$$

имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

1. Пусть $f(x), g(x) \in AC([a,b])$ и α, β – действительные числа. Доказать, что $\alpha f(x) + \beta g(x) \in AC([a,b])$ (задача 15.2).

2. Пусть $f(x), g(x) \in AC([a,b])$. Доказать, что $f(x) \cdot g(x) \in AC([a,b])$ (задача 15.3).

3. Пусть $f(x), g(x) \in AC([a,b])$ и $g(x) \neq 0$ на $[a,b]$. Доказать, что $\frac{f(x)}{g(x)} \in AC([a,b])$ (задача 15.4).

4. Пусть $f(x) \in AC([a,b])$. Доказать, что $|f(x)| \in AC([a,b])$ (задача 15.5).

5. Пусть $f(x) \in AC([a,b])$. Доказать, что $f(x) \in V([a,b])$ (задача 15.7).

6. Построить функцию $f(x) \in C([a,b]) \cap V([a,b])$ такую, что $f(x) \notin AC([a,b])$ (задача 15.8).

7. Пусть $f(x) \in AC([a,b])$. Доказать, что функция $f_1(x) = V_a^x(f) \in AC([a,b])$ (задача 15.9).

8. Пусть $f(x) \in AC([a,b])$, $g(t)$ – монотонная функция на $[\alpha,\beta]$, $g(t) \in AC([\alpha,\beta])$ и $g([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$. Доказать, что $f(g(t)) \in AC([\alpha,\beta])$ (задача 15.18).

9. Пусть функция $f:[a,b] \to \mathbf{R^1}$. Тогда скажем, что $f(x) \in \mathrm{Lip}1$, если найдется такое $C > 0$, что для любых $x,y \in [a,b]$ имеем $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$. Доказать, что если $f(x) \in \mathrm{Lip}1$, то $f(x) \in AC([a,b])$ (задача 15.13).

10. Пусть функция $f(x) \in L([a,b])$ и

$$F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t)d\,\mu$$

(μ – классическая мера Лебега) при $x \in [a,b]$. Доказать, что $F(x) \in AC([a,b])$ (задача 15.12).

11. Построить такие функции $f(x), g(x) \in AC([0,1])$, что $g([0,1]) \subseteq [0,1]$, но $f(g(x)) \notin AC([0,1])$ (задача 15.19).

12. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, а функция

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^\beta) & \text{при } x \in (0,1] \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Найти все пары (α, β) для которых $f(x) \in AC([a,b])$ (задача 15.51).