ЗАДАНИЕ 14

Пусть отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R^1}$, функция $f : [a, b] \to \mathbf{R^1}$, а T – разбиение $[a, b]$, т.е. конечный набор точек $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда положим

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Если величина

$$V_a^b(f) = \sup_T V_T(f) < \infty,$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям T отрезка $[a, b]$, то скажем, что $f(x) \in V([a, b])$ ($f(x)$ является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$), а величину $V_a^b(f)$ будем называть вариацией $f(x)$ по отрезку $[a, b]$. Очевидным образом, любая монотонная функция на $[a, b]$ является функцией ограниченной вариации на этом отрезке.

1. Пусть $f(x) \in V([a, b])$. Доказать, что $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ (задача 14.2).

2. Пусть $f(x) \in V([a, b])$ и $c \in (a, b)$. Доказать, что $f(x) \in V([a, c])$, $f(x) \in V([c, b])$ и

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

(задача 14.3).

3. Пусть $f(x) \in V([a, b])$. Доказать, что ее можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих на $[a, b]$ функций (задача 14.6).

4. Пусть $f(x) = \sin x$ на $[0, 2\pi]$. Представить ее в виде разности двух монотонно неубывающих на $[0, 2\pi]$ функций (задача 14.9).

5. Пусть $f(x), g(x) \in V([a, b])$. Доказать, что $f(x) + g(x) \in V([a, b])$ и

$$V_a^b(f + g) \le V_a^b(f) + V_a^b(g)$$

(задача 14.14).

6. Построить $f(x), g(x) \in V([0, 1])$ такие, что

$$V_0^1(f + g) < V_0^1(f) + V_0^1(g)$$

(задача 14.15).

7. Пусть $f(x), g(x) \in V([a,b])$. Доказать, что $f(x) \cdot g(x) \in V([a,b])$ и

$$V_a^b(f \cdot g) \leq \sup_{x \in [a,b]} |g(x)| \cdot V_a^b(f) + \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot V_a^b(g)$$

(задача 14.14).

8. Пусть $f(x) \in V([a,b])$. Доказать, что $|f(x)| \in V([a,b])$ и

$$V_a^b(|f|) \leq V_a^b(f)$$

(задача 14.24).

9. Построить $f(x) \notin V([a,b])$, для которой $|f(x)| \in V([a,b])$ (задача 14.25).

10. Пусть $f(x) \in V([a,b])$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Доказать, что функция $f_1(x) = V_a^x(f)$ также непрерывна в точке x_0 (задача 14.37).

11. Пусть $f(x) \in V([a,b])$ и функция $f_1(x) = V_a^x(f)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Доказать, что функция $f(x)$ также непрерывна в точке x_0 (задача 14.38).

12. Пусть $f(x) \in V([a,b]) \cap C([a,b])$. Доказать, что ее можно представить в виде разности двух непрерывных монотонно неубывающих на $[a,b]$ функций (задача 14.39).