ЗАДАНИЕ 13

1. Пусть $1 \le p < \infty$. Построить такую функцию $f(x) \in L_p([0,\infty))$, что $f(x) \notin L_r([0,\infty))$ при любом $r \in [1,\infty) \setminus \{p\}$ (задача 13.14).

2. Пусть $1 \le s < r < p < \infty$ и функция $f(x) \in L_s([0,\infty)) \cap L_p([0,\infty))$. Доказать, что $f(x) \in L_r([0,\infty))$ (задача 13.15).

3. Пусть функция $f(x) \in L_p(A)$ при всех $p \in [p_0,\infty)$, где $p_0 \ge 1$, и существует $C > 0$ такое, что $\|f\|_p \le C$ при $p \in [p_0,\infty)$. Доказать, что $f(x) \in L_\infty(A)$.

4. Пусть $1 \le p < \infty$ и последовательность $f_n(x) \to f(x)$ в пространстве $L_p(A)$. Доказать, что эта последовательность сходится к $f(x)$ и по мере на A (задача 13.22).

5. Пусть $1 \le p < \infty$ и последовательность $f_n(x) \to f(x)$ в пространстве $L_p(A)$. Доказать, что существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на A (задача 13.23).

6. Пусть $1 \le p < \infty$, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_p(A)$ почти всюду на A сходится к измеримой функции $f(x)$ и существует $C > 0$ такое, что $\|f_n\|_p \le C$ при всех n. Доказать, что $f(x) \in L_p(A)$.

7. Пусть $1 \le p < \infty$. Привести пример последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_p((0,1))$ такой, что она почти всюду на $(0,1)$ сходится к функции $f(x)$ и существует $C > 0$ такое, что $\|f_n\|_p \le C$ при всех n, но $f_n(x)$ не сходятся к $f(x)$ в $L_p((0,1))$.

8. Пусть $\mu(A) < \infty$, $1 < p < \infty$, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_p(A)$ почти всюду на A сходится к измеримой функции $f(x)$ и существует $C > 0$ такое, что $\|f_n\|_p \le C$ при всех n. Доказать, что при любом $r \in [1,p)$ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в $L_r((0,1))$ (задача 13.26).

9. Пусть μ – классическая мера Лебега на подмножествах $[0,1]$, J – пространство μ-измеримых конечных функций на $[0,1]$, а

$$J_0 = \{f(x) \in J : f(x) = 0 \text{ почти всюду на } [0,1]\}.$$

Доказать, что функция

$$\rho(f,g) = \int\limits_{[0,1]} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\, d\mu$$

задает метрику на фактор-пространстве J/J_0 (задача 13.30).

10. Доказать, что сходимость по метрике, определенной в задаче 9, эквивалентна сходимости по мере μ (задача 13.28).

11. Доказать, что пространство $L_\infty([0,1])$ несепарабельно (задача 13.57).

12. Пусть $1 < p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ и функция $f(x) \in L_p([0,1])$. Доказать, что

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{g \in L_q([0,1]) : \\ \|g\|_q = 1}} \int\limits_{[0,1]} f(x)g(x)d\,\mu$$

(задача 13.35).