ЗАДАНИЕ 12

1. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \geq 0$, а функция

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^\beta) & \text{при } x \in (0,1] \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Найти все пары (α, β) для которых: а) $f(x) \in R([0,1])$; б) $f(x) \in R((0_+,1])$ (интегрируема по Риману в несобственном смысле на $(0,1]$); в) $f(x) \in L([0,1])$ (задача 11.9).

2. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta < 0$, а функция

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^\beta) & \text{при } x \in (0,1] \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Найти все пары (α, β) для которых: а) $f(x) \in R([0,1])$; б) $f(x) \in R((0_+,1])$; в) $f(x) \in L([0,1])$ (задача 11.10).

3. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, а функция $f(x) = x^\alpha \sin(x^\beta)$ при $x \in [1,\infty)$. Найти все пары (α, β) для которых: а) $f(x) \in R([1,\infty))$ (интегрируема по Риману в несобственном смысле на $[1,\infty)$); б) $f(x) \in L([1,\infty))$ (задача 11.11).

4. Построить функцию $f(x) \in R([0,1])$, множество точек разрыва которой всюду плотно на $[0,1]$ (задача 11.19).

5. Пусть A – замкнутое нигде не плотное множество на $[0,1]$ и $\mu(A) = 0$ (μ – классическая мера Лебега). Доказать, что характеристическая функция $X_A(x) \in R([0,1])$ (задача 11.20).

6. Построить такое замкнутое нигде не плотное множество A на $[0,1]$, что $X_A(x) \notin R([0,1])$ (задача 11.21).

7. Доказать, что если функции $f(x), g(x) \in L([0,1])$, то $\max(f(x), g(x)) \in L([0,1])$.

8. Доказать, что если функции $f(x), g(x) \in R([0,1])$, то $\max(f(x), g(x)) \in R([0,1])$.

9. Построить такие функции $f(x), g(x) \in R((0_+,1])$, что $\max(f(x), g(x)) \notin R((0_+,1])$ (задача 11.30).

10. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $r > p$. Построить такую измеримую на $[0,1]$ функцию $f(x)$, что $|f(x)|^p \in L([0,1])$, но $|f(x)|^r \notin L([0,1])$.

11. Пусть $1 \leq p < \infty$. Построить такую измеримую на $[0,1]$ функцию $f(x)$, что $|f(x)|^p \in L([0,1])$, но $|f(x)|^r \notin L([0,1])$ при любом $r > p$ (задача 13.11).

12. Пусть $1 < p < \infty$. Построить такую измеримую на $[0,1]$ функцию $f(x)$, что $|f(x)|^p \notin L([0,1])$, но $|f(x)|^r \in L([0,1])$ при любом $r \in [1,p)$ (задача 13.12).