ЗАДАНИЕ 11

1. Построить такую измеримую относительно классической меры Лебега функцию $f(x)$ на $[0,1]$ и такие измеримые множества $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $f(x) \in L(A_n)$ при всех n,

$$[0,1] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int\limits_{A_n} f(x) d\,\mu \right| < \infty,$$

но $f(x) \notin L([0,1])$ (задача 10.44).

2. Пусть функция $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега и неотрицательна на $[0,1]$, измеримые множества $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что

$$[0,1] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

при любом n функция $f(x) \in L(A_n)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f(x) d\,\mu < \infty.$$

Доказать, что $f(x) \in L([0,1])$.

3. Привести пример того, что в теореме Фату нельзя неравенство заменить на равенство даже в случае, когда существует

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x) d\,\mu.$$

4. Доказать, что в теореме Фату можно заменить условие сходимости почти всюду на сходимость по мере (задача 10.36).

5. Доказать, что в теореме Лебега можно заменить условие сходимости почти всюду на сходимость по мере (задача 10.38).

6. Построить такую последовательность измеримых относительно классической меры Лебега и неотрицательных на $[0,1]$ функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, что для любого $x \in [0,1]$ она стремится к нулю, но не существует

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x) d\,\mu.$$

7. Построить такую последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L([0,1])$ и измеримую функцию $f(x)$, что для любого $x \in (0,1)$ имеем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

$$\left| \int\limits_{(0,1)} f_n(x) d\,\mu \right| \leq 1$$

при всех n, но $f(x) \notin L([0,1])$.

8. Построить такую последовательность измеримых относительно классической меры Лебега и неотрицательных на $(0,1)$ функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, что для любого $x \in (0,1)$ она стремится к нулю, $f_n(x) \leq \frac{1}{x}$ при всех n и $x \in (0,1)$, но

$$\int\limits_{(0,1)} f_n(x) d\,\mu \not\to 0$$

при $n \to \infty$ (задача 10.40).

9. Найти

$$\lim_{n\to\infty} (L) \int\limits_{(0,\infty)} \frac{d\,\mu}{x^{\frac{1}{n}}(1+\frac{x}{n})^n}$$

(задача 11.12).

10. Найти, при каких $\alpha > 0$ функция $x^{-\alpha} \in L((0,1))$ (задача 11.7 (в)).

11. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathbf{Q} \cap [0,1]$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{|x-r_n|}}$$

сходится почти всюду (задача 11.13).

12. Пусть $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$. Доказать, что можно так занумеровать $\mathbf{Q} \cap [0,1] = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{|x_0-r_n|}} = \infty.$$

(задача 11.14).