ЗАДАНИЕ 10

1. Пусть $\mu(X) < \infty$ и функция $f(x)$ измерима и конечна на X. Рассмотрим множества $E_k = \{x \in X : k-1 \le |f(x)| < k\}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Доказать, что $f(x) \in L(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(E_k) < \infty$$

(задача 10.54).

2. Пусть $\mu(X) < \infty$ и функция $f(x)$ измерима и конечна на X. Рассмотрим множества $F_k = \{x \in X : |f(x)| \ge k\}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Доказать, что $f(x) \in L(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) < \infty$$

(задача 10.56).

3. Пусть $\mu(X) < \infty$ и функция $f(x)$ измерима и конечна на X. Рассмотрим множества $F_k = \{x \in X : |f(x)| \ge k\}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Доказать, что $f(x) \in L(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(F_{2^n}) < \infty.$$

4. Пусть $\mu(X) < \infty$, функция $f(x) \in L(X)$ и множества $F_k = \{x \in X : |f(x)| \ge k\}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Доказать, что $\mu(F_k) = o(\frac{1}{k})$ при $k \to \infty$ (задача 10.59).

5. Построить такую измеримую на $[0,1]$ относительно классической меры Лебега функцию $f(x) \notin L([0,1])$, что $\mu(F_k) = o(\frac{1}{k})$ при $k \to \infty$ (задача 10.60).

6. Пусть функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_{E_n}(x),$$

где все E_n измеримы относительно классической меры Лебега на $[0,1]$ и

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0,1].$$

Доказать, что $f(x) \in L([0,1])$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \mu(E_n) < \infty.$$

(задача 10.30).

7. Пусть функция $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега на $[0,1]$. Доказать, что найдется измеримая и положительная на $[0,1]$ функция $g(x)$ такая, что $g(x)f(x) \in L([0,1])$ (задача 10.61).

8. Пусть функция $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега и положительна на $[0,1]$. Доказать, что найдется измеримая и положительная на $[0,1]$ функция $g(x)$ такая, что $g(x)f(x) \notin L([0,1])$.

9. Пусть функция $f(x)$ измерима относительно классической меры Лебега и положительна на $[0,1]$, а число $\alpha \in (0,1]$. Рассмотрим $K_\alpha = \{A \in M : \mu(A) > \alpha\}$, где M – лебеговская σ-алгебра на $[0,1]$. Доказать, что

$$\inf_{A \in K_\alpha} \int_A f(x) d\,\mu > 0.$$

10. Привести пример, показывающий, что результат задачи 9 неверен на прямой.

11. Пусть $f(x) \in L(A)$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом измеримом A с $\mu(A) < \delta$ имеем

$$\left| \int_A f(x) d\,\mu \right| < \varepsilon$$

(абсолютная непрерывность интеграла Лебега, задача 10.67).

12. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ - измеримые относительно классической меры Лебега подмножества $[0,1]$, а множество B_n при $n = 1, 2, \ldots$ состоит из тех точек $[0,1]$, которые принадлежат по крайней мере n различным A_i. Доказать, что

$$\mu(B_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

(разумеется, данное неравенство содержательно, только если сумма ряда справа конечна) (задача 10.62).