**Лекция по действительному анализу 18 мая 2020 года,**
**мехмат, 2 курс, 2 поток.**

В этой лекции будут упоминаться функции с комплексными значениями. Если $(X, M, \mu)$ — пространство с мерой, то функция $f : X \to \mathbb{C}$ имеет вид $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u$ и $v$ — функции $X \to \mathbb{R}$. Скажем, что $f \in L(X)$, если $u, v \in L(X)$. Интегралом Лебега от $f$ называется

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \int\limits_X u(x)\, d\mu + i \int\limits_X v(x)\, d\mu.$$

Можно проверить, что большинство свойств интеграла Лебега (грубо говоря, кроме тех, где встречаются монотонность последовательностей и неравенства между функциями) сохраняются. На экзамене для логической строгости можно ограничиться изложением случая вещественных значений.

## Тема 12: Ортогональные ряды в $L_2(X)$ и $L_1(X)$.

**Определение.** *Евклидовым (предгильбертовым)* пространством называется линейное пространство $H$ над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), с функцией $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2 \to \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), называемой *скалярным произведением* и удовлетворяющей следующим аксиомам:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (в вещественном случае, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$)
3. $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$.

Из аксиом 2 и 3 вытекает, что $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\beta} \langle x, y_2 \rangle$ (в вещественном случае сопряжение над скалярами не нужно).

**Теорема 12.1.** *(Неравенство Коши — Буняковского — Шварца). Для любых элементов $x, y$ евклидова пространства справедлива оценка*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

**Доказательство.**
При $x = 0$ или $y = 0$ неравенство тривиально. Если же оба вектора ненулевые, то так как при любом $t \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$0 \leqslant \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t\langle x, y \rangle + t\langle y, x \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle,$$

то дискриминант этого квадратного трехчлена вещественной переменной $t$ не положителен, т.е.

$$(\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leqslant 0, \text{ т.е. } |\operatorname{Re} \langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

В вещественном случае искомое неравенство получено. В комплексном случае, выберем $\theta$ так, чтобы $e^{i\theta} \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$. Тогда, поскольку $\langle e^{i\theta} x, e^{i\theta} x \rangle = e^{i\theta} e^{-i\theta} \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$, получаем, что

$$|\langle x, y \rangle| = e^{i\theta} \langle x, y \rangle = \langle e^{i\theta} x, y \rangle = |\operatorname{Re} \langle e^{i\theta} x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle e^{i\theta} x, e^{i\theta} x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle},$$

что и требовалось доказать.

**Следствие.** *Функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ является нормой на евклидовом пространстве.*

**Доказательство.**

Первая аксиома нормы следует из первой аксиомы скалярного произведения. Вторая следует из того, что $\langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle = |\alpha|^2\langle x, x\rangle$. Наконец, из теоремы 12.1 имеем

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

что после извлечения квадратного корня дает неравенство треугольника. Следствие доказано.

**Определение.** Функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ на евклидовом пространстве называется *евклидовой нормой* или нормой, порожденной скалярным произведением. Евклидово пространство, полное относительно этой нормы (точнее, относительно порожденной ею метрики) называется *гильбертовым.*

**Определение.** Элементы $x$ и $y$ евклидова пространства $H$ называются *ортогональными*, если $\langle x, y\rangle = 0$.

**Определение.** Система ненулевых элементов $\{e_\alpha\}$ евклидова пространства называется *ортогональной*, если любые два различных элемента этой системы ортогональны между собой. Ортогональная система называется *ортонормированной* (ОНС), если норма любого ее элемента равна единице.

Далее, говоря об ОНС, всегда будем подразумевать, что пространство не вырождено. Нас будет интересовать случай сепарабельного пространства $L_2([a, b])$ с классической мерой, в котором любая ОНС не более чем счетна. Поэтому ограничимся не более чем счетными ОНС.

**Определение.** *Коэффициентами Фурье* элемента $x$ евклидова пространства $H$ по ОНС $\{e_n\}$ называются числа $c_n(x) = \widehat{x}(n) = \langle x, e_n\rangle$. *Рядом Фурье* $x$ по $\{e_n\}$ называется ряд $\sum_n \widehat{x}(n)e_n$.

Можно также рассматривать коэффициенты и ряды Фурье по ненормированной ортогональной системе, вводя надлежащие поправки.

**Теорема 12.2.** *(Экстремальное свойство и тождество Бесселя). Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — конечная ОНС в евклидовом $H$, а $x$ — некоторый элемент $H$. Тогда*

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^n \widehat{x}(k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\widehat{x}(k)|^2.$$

**Доказательство.**

По свойствам скалярного произведения и определению коэффициентов Фурье и ОНС имеем

$$\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_k \alpha_k\langle e_k, x\rangle - \sum_k \overline{\alpha_k}\langle x, e_k\rangle + \sum_{k,j} \alpha_k\overline{\alpha_j}\langle e_k, e_j\rangle =$$
$$= \|x\|^2 - \sum_k \alpha_k\overline{\widehat{x}(k)} - \sum_k \overline{\alpha_k}\widehat{x}(k) + \sum_k |\alpha_k|^2.$$

Прибавляя и вычитая величину $\sum_{k=1}^n |\widehat{x}(k)|^2$, получаем, что

$$\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\widehat{x}(k)|^2 + \sum_{k=1}^n |\widehat{x}(k) - \alpha_k|^2.$$

Отсюда непосредственно следуют оба утверждения теоремы.

**Следствие.** *Для любого элемента $x$ и любой не более чем счетной ОНС выполнено неравенство Бесселя*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_k |\widehat{x}(k)|^2.$$

**Доказательство.**

Для конечной системы утверждение непосредственно следует из тождества Бесселя, поскольку его левая часть неотрицательна как квадрат нормы некоторого элемента. Для счетной оно получается предельным переходом от частичных сумм к сумме ряда. Следствие доказано.

Важнейшим свойством ортонормированных систем является возможность разлагать элементы пространства в сходящиеся ряды по этим системам. Это свойство эквивалентно ряду других, и в разных книгах используется разная терминология.

**Теорема 12.3.** *Пусть $\{e_n\}$ — ОНС в гильбертовом пространстве $H$. Следующие её свойства эквивалентны:*

1. *Для любого $x \in H$ выполнено (в смысла сходимости ряда по евклидовой норме) равенство $x = \sum_n \widehat{x}(n)e_n$* (система образует ортонормированный базис).
2. *Для любого $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_n |\widehat{x}(n)|^2$* (замкнутость системы).
3. *Замыкание линейной оболочки системы есть всё пространство* (тотальность системы).
4. *Если для некоторого $x$ все его коэффициенты равны нулю, то этот элемент нулевой* (полнота системы).

*При этом в евклидовом пространстве эквивалентны свойства (1)–(3), и из них следует свойство (4).*

**Доказательство.**

Возьмем элемент $x$. Тогда для любого $n$ по теореме 12.2 имеет место равенство

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}(k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}(k)|^2.$$

Отсюда непосредственно видно, что для отдельно взятого $x$ (1) и (2) эквивалентны, а тогда эквивалентны и утверждения, что (1) и (2) выполнены для всех $x$.

Импликация (1) $\to$ (3) непосредственно следует из определения линейной оболочки. Обратно, пусть некоторые полиномы $P_n$ по ОНС сходятся к элементу $x$. Ряд $\sum_k \widehat{x}(k)e_k$ сойдется к $x$, т.к. если $N$ столь велико, что $\{e_k\}_{k=1}^N$ содержит все элементы ОНС, вошедшие в $P_n$, то по экстремальному свойству $\|x - \sum_{k=1}^N \widehat{x}(k)e_k\| \leqslant \|x - P_n\|$.

Импликация (2) $\to$ (4) очевидна.

Пусть теперь система в гильбертовом пространстве полна. Возьмем элемент $x$ и рассмотрим ряд $\sum_k \widehat{x}(k)e_k$. В силу неравенства Бесселя последовательность его частичных сумм фундаментальна:

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} \widehat{x}(k)\right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\widehat{x}(k)|^2 \to 0 \text{ при } m, n \to \infty,$$

стало быть, он сходится к некоторому элементу $x_0 \in H$. Но для любого $\beta$ имеем

$$\widehat{x}_0(m) = \langle \sum_k \widehat{x}(k) e_k, e_m \rangle = \widehat{x}(m).$$

Мы воспользовались тем, что в силу теоремы 12.1 скалярное произведение – непрерывная функция любого из своих аргументов. Тогда $\widehat{x_0 - x}(m) = 0$, и из свойства (4) системы получаем, что $x = x_0$, а тогда $x = \sum_k \widehat{x}(k) e_k$, т.е. система является базисом — верно (1). Теорема доказана.

Несложно проверить, что если $(X, M, \mu)$ — пространство с мерой, то функция

$$\langle x, y \rangle = \int\limits_X x(t) \overline{y(t)}\, d\mu(t)$$

является скалярным произведением на пространстве $L_2(X, M, \mu)$ и порождает его стандартную норму, следовательно, по доказанному в теме 8 это гильбертово пространство.

Важное отличие пространств $L_2([a, b])$ (и вообще $L_2(X)$, $\mu X < \infty$) от общих евклидовых пространств состоит в следующем. Пусть ОНС $\{\varphi_n\}$ состоит из ограниченных на $X$ функций. Тогда коэффициенты Фурье

$$\widehat{x}(n) = \int\limits_X x(t) \bar{\varphi}_n(t)\, dt$$

корректно определены не только для функций из $L_2(X)$, но и для функций из более широкого класса $L_1(X)$. Поэтому можно изучать ряды Фурье функций из $L_1$ и из остальных $L_p$, а в случае отрезка — также из класса непрерывных функций. Кроме того, наряду со сходимостью по норме можно рассматривать задачи о сходимости всюду, почти всюду и т.п.

Классическим примером такой ОНС является тригонометрическая система: $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\}$, или, в комплексном виде, $\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $L_2(\mathbb{T})$, где под $\mathbb{T}$ понимается отрезок $[-\pi, \pi]$ в обычном смысле либо с отождествленными концами (тор). Здесь не только каждая функция ограничена, но и существует константа $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, ограничивающая сразу все функции в любой точке. Такие системы называются *ограниченными в совокупности.*

Мы считаем известным из курса математического анализа следующий результат:

**Теорема Вейерштрасса.** *Пусть $f$ — непрерывная $2\pi$-периодическая функция на $\mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен, т.е. функция вида*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

*для которого $\max_{\mathbb{T}} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.*

**Лемма 12.1.** *Для любого отрезка $[a, b]$ на вещественной прямой множества простых и непрерывных функций всюду плотны в пространстве $L_p([a, b])$, $1 \leqslant p < \infty$.*

**Доказательство.**

Пользуясь леммой 5.1, выберем последовательность простых функций $\{h_n(x)\}$, которые всюду сходятся к $f$, имеют в каждой точке тот же знак, что и $f$ (либо равны нулю) и удовлетворяют неравенству $|h_n(x)| \leqslant |f(x)|$. Для этого достаточно применить эту лемму к $f_+$ и $f_-$ по отдельности. Тогда $|h_n(x) - f(x)|^p \leqslant |f(x)|^p$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что

$$\int\limits_{[a,b]} |h_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \to 0,$$

и при достаточно больших $n$ это дает оценку $\|f - h_n\|_p < \varepsilon$ для заданного наперёд $\varepsilon > 0$. Далее, заметим, что если простая функция $h(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}(x)$ фиксирована и задано $\delta > 0$, то в силу определения измеримого множества можно подобрать такие множества $B_n \in R(S)$, то есть конечные дизъюнктные объединения промежутков, что $\mu(E_k \triangle B_k) < \delta$. Тогда для функции $\tilde{h}(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{B_k}(x)$ по неравенству Минковского получаем, что

$$\|h - \tilde{h}\|_2 \leqslant \sum_{k=1}^n |c_k| \|\chi_{E_k} - \chi_{B_k}\|_p \leqslant \sum_{k=1}^n |c_k| \delta^{1/p}.$$

Уменьшая $\delta$, можно добиться, чтобы $\|h - \tilde{h}\|_p < \varepsilon$. Наконец, функции $\chi_{B_k}$ можно сколь угодно точно приблизить непрерывными (а именно, кусочно-линейными) функциями $g_k$ в норме $L_p$, что дает оценку

$$\left\| \tilde{h} - \sum_{k=1}^n c_k g_k \right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^n |c_k| \|g_k - \chi_{B_k}\|_p < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

**Следствие.** *Тригонометрическая система тотальна (следовательно, является базисом) в $L_2(\mathbb{T})$.*

**Доказательство.**

По теореме Вейерштрасса, любую непрерывную периодическую функцию можно приблизить тригонометрическим многочленом равномерно, тем более, в норме $L_2$. Тем самым замыкание линейной оболочки тригонометрической системы содержит все непрерывные функции, а тогда в силу предыдущей леммы оно равно всему пространству $L_2$.

**Теорема 12.4.** *(Теорема Мерсера) Пусть $\{\varphi_n\}$ — ОНС в $L_2(X)$, ограниченная в совокупности. Тогда для любой функции из $L_1(X)$ её коэффициенты Фурье стремятся к нулю.*

**Доказательство.**

Пусть $|\varphi_n(t)| \leqslant M$ для всех $n$ и $t$. Рассмотрим последовательность простых функций $\{y_n(t)\}$, сходящуюся к $x(t)$ в $L_1(X)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такое $n_0$, что $\|x - y_N\|_1 < \frac{\varepsilon}{2M}$. Функция $y_N$ лежит в $L_2(X)$, так что по неравенству Бесселя $\sum_k |\widehat{y_N}(k)|^2 < \infty$. Тогда при достаточно больших $k$ $|\widehat{y_N}(k)| < \frac{\varepsilon}{2}$. При таких $k$ получаем

$$|\widehat{x}(k)| \leqslant |\widehat{y_N}(k)| + \left| \int\limits_X (x(t) - y_N(t)) \bar{\varphi}_k(t) \, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M \|x - y_N\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

**Лемма 12.2.** *Частичная сумма тригонометрического ряда Фурье имеет вид*

$$S_n(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) \, dt,$$

*где*

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \text{ — } n\text{-е ядро Дирихле.}$$

**Доказательство.**

Подставляя формулы для вычисления скалярного произведения, имеем

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos nx\cos ns + \sin nx \sin ns)\right)ds.$$

Пользуясь формулой косинуса разности и делая замену $x - s = t$, находим, что

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos nt.$$

Домножим обе стороны на $2\sin\frac{t}{2}$:

$$2\sin\frac{t}{2}D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}\cos nt\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})t - \sin(k-\frac{1}{2})t),$$

откуда вытекает утверждение леммы.

**Теорема 12.4.** *(Признак Дини) Пусть функция $f$ принадлежит $L_1(\mathbb{T})$ и в некоторой точке $x$ для некоторого числа $S$ для некоторого $\delta > 0$ существует*

$$\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{|t|}\,dt.$$

*Тогда ряд Фурье функции $f$ сходится в точке $x$ к числу $S$.*

**Доказательство.**

Положим для краткости $x = 0$. Поскольку $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \pi$, то

$$\pi(S_n(f,x) - S) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t)-S)D_n(t)\,dt = \int\limits_{0}^{\pi}(f(t)+f(-t)-2S)D_n(t)\,dt.$$

Заметим, что $|2\sin\frac{t}{2}| > \frac{2}{\pi}|t|$ на $(0,\pi]$, так что

$$\int\limits_{0}^{\delta}|f(t)+f(-t)-2S|D_n(t)\,dt \leqslant \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|f(t)+f(-t)-2S|}{|t|}\,dt.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|f(t)+f(-t)-2S|}{|t|}\,dt < \frac{\varepsilon}{\pi};\ \text{тогда}\ \int\limits_{0}^{\delta}|f(t)+f(-t)-2S|D_n(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, полагая $g(t) = f(t)+f(-t)-2S$, имеем

$$\int\limits_{\delta}^{\pi}g(t)D_n(t)\,dt = \int\limits_{\delta}^{\pi}g(t)\cos nt\,dt + \int\limits_{\delta}^{\pi}\left(\frac{g(t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right)\sin nt\,dt.$$

Поскольку функции $g(t)\chi_{[\delta,\pi]}$ и $\frac{g(t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\chi_{[\delta,\pi]}$ интегрируемы на $\mathbb{T}$, то по теореме Мерсера

$$\int\limits_{\delta}^{\pi} g(t)D_n(t)\,dt \to 0 \text{ при } n\to\infty$$

(для фиксированного $\delta>0$), откуда получаем утверждение теоремы.

**Следствие.** *Сходимость или расходимость ряда Фурье интегрируемой функции $f$ в точке $x$ определяется её поведением в сколь угодно малой окрестности точки $x$.*

## Системы Радемахера и Уолша.

Еще одним классическим примером ОНС является система Уолша.

Введем вначале систему Радемахера на отрезке $[0,1]$: для числа $x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$ положим $r_k(x)=(-1)^{x_k}$, $n\in\mathbb{N}$. В двоично-рациональных точках можно поступить по-разному: оставить функцию не определенной, положить ее равной нулю и т.д. Мы для удобства будем считать её непрерывной справа в этих точках, т.е. брать для них двоичное разложение с нулем в периоде, и полагать $r_k(1)=0$. Наиболее естественным для систем Радемахера и Уолша является рассмотрение их на двоичной группе, т.е. на на множестве последовательностей из нулей и единиц с покоординатным сложением по модулю 2, но об этом мы говорить не будем. Пусть $\Delta_j^k=[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})$, $j=1,\dots,2^k$. Это — полуинтервалы постоянства функции $r_k$.

**Лемма 12.3.** *Для любого непустого набора натуральных чисел $\{k_1,\dots,k_n\}$ выполнено равенство*

$$\int\limits_0^1\prod_{l=1}^{n} r_{k_l}(x)\,dx=0.$$

**Доказательство.**

Пусть для определенности $k=k_n$ — максимальное. Тогда функция $\prod_{l=1}^{n-1} r_{k_l}(x)$ постоянна на $\Delta_j^{k-1}=\Delta_{2j-1}^k\cup\Delta_{2j}^k$, и тем самым

$$\int\limits_{\Delta_j^{k-1}}\prod_{l=1}^{n} r_{k_l}(x)\,dx=\prod_{l=1}^{n-1} r_{k_l}\Big(\frac{2j-1}{2^k}\Big)\bigg(\int\limits_{\Delta_{2j-1}^k}1\,dx+\int\limits_{\Delta_{2j}^k}(-1)\,dx\bigg)=0.$$

Суммируя по $j=1,\dots,2^{k-1}$, получаем утверждение леммы.

**Следствие.** *Система Радемахера является ортонормированной системой.*

Рассмотрим теперь систему всех произведений наборов функций Радемахера (в том числе тождественную единицу — призведение по пустому набору). Поскольку ${r_n}^2(x)\sim 1$, то получаем

**Следствие.** *Система Уолша является ортонормированной системой.*

Поскольку система Радемахера является подсистемой системы Уолша, то первая, естественно, не полна.

Прежде чем доказывать, что система Уолша полна, определим для неё одну из стандартных нумераций (нумерация Пэли). Положим $w_0(x)\equiv 1$; для натурального $n=\sum_{k=0}^{m-1}2^{k-1}n_k$, $n_k\in\{0,1\}$, положим $w_n(x)=\prod_{k=0}^{m-1}(r_{k+1}(x))^{n_k}$.

**Теорема 12.5.** *Система Уолша тотальна (следовательно, полна) в $L_2([0,1])$.*

**Доказательство.**
Обозначим через $E_m$ линейное подпространство в $L_2([0,1])$, состоящее из функций, постоянных на каждом $\Delta_j^m$. Его размерность равна $2^m$.

Проверим два факта: (1) каждое $E_m$ лежит в линейной оболочке системы Уолша; (2) объединение $E_m$ по всем $m$ всюду плотно в $L_2$. Из них по определению следует тотальность системы.

(1) Функции $w_0, \ldots, w_{2^m-1}$ лежат в $E_m$, поскольку они суть произведения некоторых из $r_1, \ldots, r_m$, а все эти функции постоянны на $\Delta_j^m$. Но эти функции линейно независимы, поскольку по лемме 12.3 они попарно ортогональны. Их число равно размерности пространства, тем самым они образуют базис в нем.

(2) По лемме 12.1 непрерывные функции плотны в $L_2([0,1])$. Для заданной непрерывной функции $g$ положим, например,

$$h_m(x) = \sum_{j=1}^{2^m} g\Big(\frac{j-1}{2^m}\Big)\chi_{\Delta_j^m}(x).$$

Тогда $h_m \in E_m$. В силу равномерной непрерывности функции $g$ эти функции равномерно сходятся к $g$ на $[0,1)$, а тогда они сходятся и по норме $L_2$.

Теорема доказана.