Лекция по действительному анализу 11 мая 2020 года, мехмат, 2 курс, 2 поток.

Тема 3: Продолжение меры по Лебегу (дополнение).

Установим утверждение о структуре измеримых по Лебегу множеств. Это аналог утверждения о том, что в случае классической меры Лебега измеримое множество есть разность борелевского множества (точнее, множества типа G_δ) и множества меры нуль.

Теорема 3.7. *Пусть множество A измеримо по Лебегу относительно меры m на полукольце S, причем $\mu A < \infty$. Тогда найдутся множества $B_{n,k} \in R(S)$, для которых выполнены следующие условия.*

1. При каждом n выполнены включения $B_{n,1} \subseteq B_{n,2} \subseteq \dots \subseteq B_{n,k} \subseteq \dots$.

2. Для множеств $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$ выполнены включения $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n \supseteq \dots$ и условия $\mu B_n < \infty$.

3. Для множества $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ выполнены условия $B \supseteq A$ и $\mu(B) = \mu(A)$, т.е. $\mu(B \setminus A) = 0$.

Доказательство.

Для произвольного n найдутся такие $\Delta_{n,k} \in S$, что

$$A \subseteq C_n = \bigcup_k \Delta_{n,k} \qquad \text{и} \qquad \mu(C_n) \leqslant \sum_k m(\Delta_{n,k}) < \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Действительно, для конечной меры это непосредственно вытекает из определения внешней меры. Для σ-конечной меры разобьем единицу X на множества X_s конечной меры и покроем $X_s \cap A$ элементами $\Delta_{n,s,j} \in S$ с суммой мер меньшей, чем $\mu(X_s \cap A) + \frac{1}{n \cdot 2^s}$.

Положим $B_n = \bigcap\limits_{j=1}^{n} C_j$ и $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $B_n \supset B_{n+1}$ и

$$\mu(A) \leqslant \mu(B) \leqslant \inf_n \mu(B_n) \leqslant \inf_n \mu(C_n) = \mu(A).$$

Найдём такие $D_{n,k} \in S$, что $B_n = \bigcup\limits_k D_{n,k}$. Действительно, при $n = 1$ можно взять $D_{1,k} = \Delta_{1,k}$; если утверждение доказано для B_{n-1}, то

$$B_n = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{n-1,k}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{n,i}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} (D_{n-1,k} \cap \Delta_{n,i}),$$

где $(D_{n-1,k} \cap \Delta_{n,i}) \in S$ по второй аксиоме полукольца. Положим $B_{n,k} = \bigcup_{i=1}^{k} D_{n,i}$, тогда $B_{n,k} \subset B_{n,k+1}$ и $B_{n,k} \in R(S)$. Итак, построенные множества удовлетворяют условиям теоремы.

Тема 11: Абсолютно непрерывные функции (продолжение).

Теорема 11.4. *(формула интегрирования по частям) Если F и G абсолютно непрерывны на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b F(x)G'(x)\, d\mu = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x)G(x)\, d\mu$$

Доказательство.
Проверим, что произведение двух абсолютно непрерывных функций есть абсолютно непрерывная функция. Для произвольного интервала (α, β) имеет место равенство

$$F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha) = (F(\beta) - F(\alpha))G(\beta) + (G(\beta) - G(\alpha))F(\alpha).$$

Если задана система интервалов $\{(a_k, b_k)\}$, то положим $\Delta\varphi_k = \varphi(b_k) - \varphi(a_k)$ — приращение функции φ на k-м интервале. Поскольку абсолютно непрерывная функция, как и любая непрерывная функция, ограничена на отрезке $[a, b]$, то

$$\sum_k |\Delta(FG)_k| \leqslant \max|G| \sum_k |\Delta F_k| + \max|F| \sum_k |\Delta G_k|.$$

Выбирая $\delta > 0$ так, чтобы при $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ выполнялись бы оценки

$$\sum_k |\Delta F_k| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \max|G|)} \text{ и } \sum_k |\Delta G_k| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \max|F|)},$$

получим, что $\sum_k |\Delta(FG)_k| < \varepsilon$.

Теперь применим к абсолютно непрерывной функции FG теорему 11.3 (формулу Ньютона — Лейбница):

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int\limits_a^b (F(x)G(x))'\, d\mu$$

Но в каждой точке, где F и G дифференцируемы, $(FG)' = FG' + F'G$. Подставим это равенство в интеграл и воспользуемся линейностью интеграла. Теорема доказана.

Лемма 11.4. *Пусть g — строго возрастающая абсолютно непрерывная функция $[a, b] \to [c, d]$. Тогда для любого классически измеримого множества $A \subset [c, d]$ выполнено равенство*

$$\mu(A) = \int\limits_{[c,d]} \chi_A(y)\, dy = \int\limits_{[a,b]} \chi_A(g(x)) g'(x)\, dx. \qquad (*)$$

Доказательство.
Если $E = (\alpha, \beta)$, то, находя такие α' и β', что $\alpha = g(\alpha')$, $\beta = g(\beta')$, по теореме 11.3 имеем

$$\mu(E) = \beta - \alpha = g(\beta') - g(\alpha') = \int\limits_{[\alpha', \beta']} g'(x)\, dx = \int\limits_{[a,b]} \chi_E(g(x)) g'(x)\, dx.$$

По линейности $(*)$ верно для любого множества $E \in R(S)$. Если $(*)$ верно для множеств E_k, где $E_k \subset E_{k+1}$ и $E = \bigcup_k E_k$, то в силу неотрицательности g' имеем

$$\chi_{E_k}(y) \uparrow \chi_E(y), \quad \chi_{E_k}(g(x)) g'(x) \uparrow \chi_E(g(x)) g'(x),$$

а тогда по теореме Б. Леви $(*)$ верно и для E. Аналогично рассматривается случай убывающей последовательности множеств. Тем самым, каково бы ни было множество $A \in \mathfrak{M}$, равенство $(*)$ верно для множества B, построенного по A в теореме 3.7 о структуре измеримых множеств.

Докажем теперь $(*)$ для случая, когда $\mu E = 0$; в силу теоремы 3.7 отсюда будет следовать утверждение леммы (вычитанием из равенства для B равенства для $B \setminus A$). Если

$\mu E = 0$, то по теореме о структуре измеримых множеств найдется множество $B_0 \supset E$, для которого $\mu B_0 = 0$, а утверждение уже доказано. Тогда

$$\mu(B_0) = \int\limits_{[c,d]} \chi_{B_0}(y)\,dy = \int\limits_{[a,b]} \chi_{B_0}(g(x))g'(x)\,dx = 0,$$

следовательно, $\chi_{B_0}(g(x))g'(x) = 0$ п.в., тем более, $\chi_E(g(x))g'(x) = 0$, а тогда

$$0 = \mu(E) = \int\limits_{[c,d]} \chi_E(y)\,dy = \int\limits_{[a,b]} \chi_E(g(x))g'(x)\,dx = 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 11.5. *(Замена переменной в интеграле Лебега.) Пусть g — строго возрастающая абсолютно непрерывная функция $[a,b] \to [c,d]$. Тогда для любой функции $f \in L([c,d])$ выполнено равенство*

$$\int\limits_{[c,d]} f(y)\,dy = \int\limits_{[a,b]} f(g(x))g'(x)\,dx. \qquad (**)$$

Доказательство.
Если f — индикатор измеримого множества, то утверждение доказано в лемме 11.4. По линейности $(**)$ верно для любой простой функции. Для неотрицательной интегрируемой функции $f(x)$ подберем по лемме 5.1 последовательность $\{h_n(x)\}$ простых функций: $h_n(x) \uparrow f(x)$ всюду. В силу неотрицательности $g'(x)$ имеем $h_n(g(x))g'(x) \uparrow f(g(x))g'(x)$ п.в. Тогда к обеим частям равенства $(**)$ для h_n применима теорема Б. Леви, и она даёт равенство $(**)$ для f. Общий случай получается разложением функции f в разность положительной и отрицательной частей и вычитанием соответствующих равенств. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании интеграла Лебега по параметру. Отметим, что аналогично можно получить и результат о дифференцировании интеграла Лебега по комплексному параметру.

Теорема 11.6. *Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой. Пусть Y — интервал на вещественной оси, $\varphi(x,y)$ — функция на $X \times Y$, интегрируемая по Лебегу на X при каждом фиксированном y и непрерывно дифференцируемая на Y при каждом фиксированном x. Если к тому же для $y_0 \in Y$ существуют такие $g(x) \in L(X)$ и $\delta > 0$, что $|\varphi'_y(x,y)| \leqslant g(x)$ при почти всех $x \in X$ и при всех таких y, что $|y - y_0| < \delta$, то существует*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_X \varphi(x,y)d\mu(x)\Big|_{y=y_0} = \int\limits_X \varphi'_y(x,y_0)d\mu(x).$$

Доказательство.
Рассмотрим произвольную последовательность точек $y_n = y_0 + \Delta y_n \to y_0$, где $|\Delta y_n| < \delta$. Тогда для функции

$$F(y) = \int\limits_X \varphi(x,y)d\mu(x)$$

имеем
$$\frac{F(y_n)-F(y_0)}{\Delta y_n}=\int\limits_X \frac{\varphi(x,y_n)-\varphi(x,y_0)}{\Delta y_n}d\mu(x).$$
При каждом фиксированном $x\in X$ подынтегральные функции сходятся к $\varphi'_y(x,y_0)$ при $n\to\infty$. Проверим, что g является мажорантой подынтегральных функций; тогда по теореме Лебега можно будет осуществить предельный переход. Действительно, по теореме Лагранжа при каждом x для некоторой промежуточной точки $t_{x,n}$ имеем
$$\varphi(x,y_n)-\varphi(x,y_0)=(y_n-y_0)\varphi'_y(x,t_{x,n}),$$
откуда
$$|\varphi(x,y_n)-\varphi(x,y_0)|\leqslant|y_n-y_0|\max_y|\varphi'_y(x,y)|\leqslant|\Delta y_n|g(x).$$
Теорема доказана.

Тема 7: Произведения мер (продолжение).

Следующие две теоремы являются аналогами геометрической интерпретации интеграла как площади для случая произвольных мер.

Теорема 7.2. *Пусть μ_1 и μ_2 — полные σ-аддитивные меры на σ- алгебрах M_1 и M_2 с единицами X_1 и X_2 соответственно, $\mu=\mu_1\times\mu_2$, а множество $A\subseteq X_1\times X_2$ измеримо относительно произведения мер и $\mu A<\infty$. Для $x\in X_1$ положим*
$$A_x=\{y\in X_2\,:\,(x,y)\in A\}.$$
Тогда
$$\mu(A)=\int\limits_{X_1}\mu_2(A_x)\,d\mu_1, \qquad (i)$$
причем интеграл в правой части корректно определен, то есть $A_x\in M_2$ для μ_1-почти всех x, а функция $\varphi_A(x)=\mu_2(A_x)$ будет M_1-измерима и интегрируема по Лебегу на X_1.

Доказательство.
Положим $\varphi_A(x)=\mu_2(A_x)$. Если $A\in S=M_1\times M_2$, то есть $A=A_1\times A_2$, то
$$\varphi_A(x)=\begin{cases}\mu_2(A_2), & \text{если } x\in A_1;\\ 0, & \text{если } x\notin A_1.\end{cases}$$
Поскольку $\mu(A)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$, то равенство (i) в данном случае верно. Тогда оно верно и для множеств из $R(S)$, поскольку их можно представить в виде конечного дизъюнктного объединения элементов S, мера аддитивна, а интеграл линеен.

Пусть теперь A — произвольное измеримое множество. Построим для него множества B, B_n и $B_{n,k}$, указанные в теореме 3.7. Так как B_n — объединение расширяющихся множеств $B_{n,k}$, то $\mu(B_n)=\lim\limits_{k\to\infty}\mu B_{n,k}$, и $\varphi_{B_{n,k}}(x)\uparrow\varphi_{B_n}(x)$ при $k\to\infty$. К последовательности функций $\{\varphi_{B_{n,k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ применима теорема Б. Леви (интегралы ограничены в совокупности величиной μB_n). Поэтому равенство (i), справедливое для $B_{n,k}\in R(S)$, справедливо и для множеств B_n. Аналогично осуществляется предельный переход от вложенных множеств B_n к множеству B. Итак, в силу теоремы 3.7 нам достаточно доказать теперь (i) для случая $\mu(A)=0$, а затем вычесть полученные равенства друг из друга.

Пусть $\mu(A) = 0$, и B_0 — множество, построенное по множеству A согласно теореме 3.7. Тогда $\mu(B_0) = 0$ и по доказанному

$$0 = \mu(B_0) = \int\limits_{X_1} \varphi_{B_0}(x)\, d\mu_1.$$

Поэтому $\varphi_{B_0}(x) = \mu_2(B_{0x}) = 0$ п.в. Но всегда $A_x \subseteq B_{0x}$, а тогда $\varphi_A(x) = 0$ п.в. в силу полноты меры μ_2, и (i) выполнено для множества A. (Отметим здесь, что для тех x, для которых $\varphi_{B_0}(x) = \mu_2(B_{0x}) > 0$, множество A_x может оказаться неизмеримым, но в силу полноты меры μ_1 недоопределенность функции φ_A на множестве меры нуль не существенна.) Теорема доказана.

Теорема 7.3. *Пусть μ_1 — полная σ-аддитивная мера на σ- алгебре M_1 с единицей X_1, а μ_2 — классическая мера Лебега на $\mathbb{R}$. Пусть $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, f — интегрируемая по Лебегу неотрицательная функция на множестве $E \in M_1$. Тогда множество $A = A(f) = \{(x, y) : x \in E,\ 0 \leqslant y < f(x)\}$ измеримо относительно μ и*

$$\mu(A) = \int\limits_E f(x) d\mu_1.$$

Доказательство.

Если $f(x) = \sum_k c_k \chi_{E_k}(x)$ — простая функция, то $A(f) = \bigsqcup_k E_k \times [0, c_k]$ — измеримо и

$$\mu A(f) = \sum_k c_k \mu_1 E_k = \int\limits_E f(x) d\mu_1.$$

Для $f \in L(X)$, $f(x) \geqslant 0$, по лемме 5.1 найдется последовательность простых функций $\{f_n\}$, $f_n \uparrow f$. Поэтому множество $A(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A(f_n)$ измеримо, и, переходя в равенстве для f_n к пределу (в левой части — по теореме 2.5 о непрерывности меры снизу, в правой части — по лемме 5.7), получаем утверждение теоремы.

Теорема 7.4. *(Фубини) Пусть (X_j, M_j, μ_j), $j = 1, 2$ — измеримые пространства с полными мерами, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ — их прямое произведение, определенное на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ с единицей $X = X_1 \times X_2$. Пусть функция $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Тогда*

1. Функция $f(x, \cdot)$ измерима и интегрируема на X_2 по мере μ_2 при μ_1-почти всех $x \in X_1$.

2. Функция $I_f(x) = \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ (доопределенная произвольным образом на множестве меры нуль, где этот интеграл не существует) измерима на X_1 и интегрируема относительно меры μ_1.

3. Имеет место равенство

$$\int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x, y) = \int\limits_{X_1} I_f(x)\, d\mu_1(x) = \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x). \qquad (ii)$$

Кратко это выражают следующим образом: из существования двойного интеграла следует существование повторного и их равенство.

Замечание. Из соображений симметрии ясно, что существует и другой повторный интеграл, который тоже равен двойному, в частности, при этом повторные интегралы равны. Но из существования повторных интегралов не следует их равенства, а даже если они равны, то отсюда не следует существования двойного интеграла.

Доказательство.
Если $f(x,y)=\chi_E(x,y)$, где $E\in\mathfrak{M}$, то в обозначениях теоремы 7.2 имеем $f(x,\cdot)=\chi_{E_x}(\cdot)$, и по этой теореме $f(x,\cdot)$ будет M_2-измерима для μ_1-почти всех x, а также $I_f(x)=\mu_2(E_x)\in L(X_1)$, а равенство (ii) превращается в равенство (i), т.е. все утверждения теоремы Фубини выполнены. По линейности они выполнены для любой простой функции.

Пусть теперь $f(x,y)$ — произвольная неотрицательная интегрируемая функция, а $\{f_n\}$, $f_n\uparrow f$ — последовательность простых функций, которая построена в лемме 5.1. Функция $f_n(x,\cdot)$ измерима при $x\notin R_n$, где $\mu_1 R_n=0$. При $x\notin R=\bigcup_n R_n$ (т.е при почти всех x) функция $f(x,\cdot)$ будет поточечным пределом измеримых функций $f_n(x,\cdot)$, следовательно, сама будет измерима. По построению $\{I_{f_n}(x)\}$ — неубывающая последовательность на дополнении к R, поэтому всюду там имеет конечный либо бесконечный предел. При каждом $x\notin R$ соответственно либо по теореме Б.Леви имеем

$$I_f(x)=\int\limits_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{X_2} f_n(x,y)d\mu_2(y)=\lim_{n\to\infty} I_{f_n}(x)$$

либо $I_f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} I_{f_n}(x)=+\infty$. Но так как

$$\int\limits_{X_1} I_{f_n}(x)\,d\mu_1(x)=\int\limits_{X} f_n(x,y)\,d\mu(x,y)\leqslant\int\limits_{X} f(x,y)\,d\mu(x,y),$$

то к последовательности $\{I_{f_n}(x)\}$ применима теорема Б.Леви, её предел $I_f(x)$ конечен почти всюду и

$$\int\limits_{X_1} I_f(x)\,d\mu_1(x)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{X_1} I_{f_n}(x)\,d\mu_1(x)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{X} f_n(x,y)\,d\mu(x,y)=\int\limits_{X} f(x,y)\,d\mu(x,y)$$

(последнее равенство получается опять из теоремы Б.Леви). Это доказывает теорему для неотрицательных функций.

Для функции, принимающей не только неотрицательные значения, утверждение получается, если представить её как разность положительной и отрицательной частей и вычесть равенства для них друг из друга.