Лекция по действительному анализу 27 апреля 2020 года, мехмат, 2 курс, 2 поток.

Тема 10: Функции ограниченной вариации (продолжение).

Определение. Верхней и нижней производными функции $f(x)$ называются величины

$$\overline{f'}(x) = \varlimsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ и } \underline{f'}(x) = \varliminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(конечные или бесконечные).

Лемма 10.2. *Пусть функция $f(x)$ строго возрастает на $[a,b]$, и всюду на множестве $E \subset (a,b)$ выполнено условие $\underline{f'}(x) \leqslant p$, где $p > 0$. Тогда $\mu^* f(E) \leqslant p\mu^*(E)$.*

Доказательство.

Пусть $p_0 > p$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем открытое множество $G \supseteq E$, для которого $\mu(G) \leqslant \mu^*(E)+\varepsilon$ (оно существует по определению внешней меры). Для любой точки $x \in E$ найдутся такие точки $h_n(x) \to 0$, что $\frac{f(x+h_n(x))-f(x)}{h_n(x)} \leqslant p_0$. Пусть $d_n(x)$ — отрезок от x до $x+h_n(x)$, а $D_n(x)$ — отрезок от $f(x)$ до $f(x+h_n(x))$. При этом $h_n(x)$ можно считать столь малыми, что $d_n \subseteq G$. Отрезки $D_n(x)$ — невырожденные, поскольку функция строго возрастает, и

$$\mu(D_n(x)) \leqslant p_0 \mu(d_n(x)) = p_0 |h_n(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, система $S = \{D_n(x)\}_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ покрывает $f(E)$ в смысле Витали. Выберем, согласно теореме Витали, такую систему $\{D_{n_k}(x_k)\} \subseteq S$, что $\mu^*(f(E) \setminus \bigsqcup_k D_{n_k}(x_k)) = 0$. Отрезки $d_{n_k}(x_k)$ также попарно не пересекаются в силу строгого возрастания функции. Тогда имеет место оценка

$$\mu^*(f(E)) \leqslant \mu\left(\bigsqcup_k D_{n_k}(x_k)\right) \leqslant \sum_k \mu(D_{n_k}(x_k)) \leqslant p_0 \sum_k \mu(d_{n_k}(x_k)) =$$
$$= p_0 \mu\left(\bigsqcup_k d_{n_k}(x_k)\right) \leqslant p_0 \mu G \leqslant p_0(\mu^*(E)+\varepsilon).$$

Поскольку $p_0 > p$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 10.3. *Пусть $q > 0$, функция $f(x)$ строго возрастает на $[a,b]$, всюду на множестве $E \subset (a,b)$ выполнено условие $\overline{f'}(x) \geqslant q$, и функция f непрерывна в каждой точке $x \in E$. Тогда $\mu^* f(E) \geqslant q\mu^*(E)$.*

Доказательство.

Пусть $q_0 \in (0,q)$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем открытое множество $G \supseteq f(E)$, для которого $\mu(G) \leqslant \mu^*(f(E)) + \varepsilon$ — оно существует по определению внешней меры. Для любой точки $x \in E$ найдутся такие точки $h_n(x) \to 0$, что $\frac{f(x+h_n(x))-f(x)}{h_n(x)} \geqslant q_0$. Пусть $d_n(x)$ — отрезок от x до $x+h_n(x)$, а $D_n(x)$ — отрезок от $f(x)$ до $f(x+h_n(x))$. При этом в силу непрерывности функции f числа $h_n(x)$ можно считать столь малыми, что $D_n(x) \subseteq G$. Заметим, что система $S_1 = \{d_n(x)\}_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ покрывает E в смысле Витали. Выберем, согласно теореме Витали, такую систему $\{d_{n_k}(x_k)\} \subseteq S_1$, что $\mu^*(E \setminus \bigsqcup_k d_{n_k}(x_k)) = 0$. При этом отрезки

$D_{n_k}(x_k)$ также попарно не пересекаются в силу строгого возрастания функции. Тогда

$$\mu^*(E) \leqslant \mu\left(\bigsqcup_k d_{n_k}(x_k)\right) \leqslant \sum_k \mu(d_{n_k}(x_k)) \leqslant \frac{1}{q_0}\sum_k \mu(D_{n_k}(x_k)) = \\ = \frac{1}{q_0}\mu\left(\bigsqcup_k D_{n_k}(x_k)\right) \leqslant \frac{1}{q_0}\mu G \leqslant \frac{1}{q_0}(\mu^*(f(E)) + \varepsilon).$$

Поскольку $q_0 \in (0, q)$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 10.3. *Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция дифференцируема почти всюду на этом отрезке.*

Доказательство.

Достаточно рассмотреть случай неубывающей функции. Если $g(x)$ — неубывающая на отрезке $[a, b]$, то $f(x) = g(x) + x$ — строго возрастающая функция, дифференцируемая ровно в тех же точках, что и $g(x)$. Она имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Пусть E — множество ее точек непрерывности на (a, b), а A — множество точек, где существует производная $f'(x)$. Заметим, что верхняя и нижняя производные функции $f(x)$ всюду положительны (возможно, равны $+\infty$, но не меньше единицы). Введем множества $E_\infty = \{x \in E : \underline{f'}(x) = +\infty\}$ и (для $p < q$) $E_{p,q} = \{x \in E : \underline{f'}(x) \leqslant p < q \leqslant \overline{f'}(x)\}$. Тогда имеет место равенство

$$E \setminus A = E_\infty \cup \bigcup_{p,q\in\mathbb{Q}_+,\, p<q} E_{p,q}.$$

Докажем, что мера каждого множества в этом счётном объединении равна нулю. Для любого $r > 0$ всюду на E_∞ выполнена оценка $\underline{f'}(x) > r$, и тем более — оценка $\overline{f'}(x) > r$. Тогда по лемме 10.3 имеет место неравенство

$$\mu^*(f(E_\infty)) \geqslant r\mu^*(E_\infty).$$

Но $\mu^*(f(E_\infty)) \leqslant f(b) - f(a) < \infty$. В силу произвольности r это возможно лишь при $\mu^*(E_\infty) = 0$.

Далее, для каждого множества $E_{p,q}$ в силу леммы 10.2 выполнена оценка $\mu^* f(E_{p,q}) \leqslant p\mu^*(E_{p,q})$, а в силу леммы 10.3 выполнена оценка $\mu^* f(E_{p,q}) \geqslant q\mu^*(E_{p,q})$. Таким образом, $q\mu^*(E_{p,q}) \leqslant p\mu^*(E_{p,q})$, а поскольку $0 < p < q$, то это возможно лишь при $\mu^*(E_{p,q}) = 0$.

Итак, $\mu(E \setminus A) = 0$. Поскольку $[a, b] \setminus E$ — не более чем счетное множество, то тогда и $\mu([a, b] \setminus A) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 10.4. *Пусть $f(x)$ — монотонно неубывающая функция на отрезке $[a, b]$. Тогда $f'(x) \in L([a, b])$ и*

$$\int_{[a,b]} f'(x)\, d\mu \leqslant f(b) - f(a).$$

Доказательство.

Доопределим функцию f, полагая $f(x) = f(b)$ при $x > b$. Рассмотрим функции $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$. Они неотрицательны, так как f не убывает, и сходятся к $f'(x)$ в каждой точке существования производной ($x \neq b$), то есть, согласно теореме 10.3, почти всюду. Заметим, что

$$\int\limits_{[a,b]} f_n(x)\,d\mu = n\left(\int\limits_{[a+\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\mu - \int\limits_{[a,b]} f(x)\,d\mu\right) =$$

$$= n\int\limits_{[b,b+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\mu - n\int\limits_{[a,a+\frac{1}{n}]} f(x)\,d\mu \leqslant f(b)-f(a).$$

Тогда по теореме Фату $f'(x) \in L([a,b])$ и

$$\int\limits_{[a,b]} f'(x)\,d\mu \leqslant f(b)-f(a).$$

Следствие. *Если функция имеет ограниченную вариацию на отрезке, то она дифференцируема п.в. на этом отрезке, а ее производная интегрируема по Лебегу относительно классической меры.*

Утверждение сразу вытекает из теоремы и из того, что функция ограниченной вариации — разность двух монотонных.

Тема 11: Абсолютно непрерывные функции.

Пример функции Кантора показывает, что для монотонной функции в теореме 10.4 может не быть равенства, тем самым формула Ньютона — Лейбница не выполняется. Рассмотрим более узкий класс функций, для которого эта формула справедлива.

Определение. Функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется абсолютно непрерывной ($f \in AC([a,b])$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой системы попарно непересекающихся интервалов $\{(a_k,b_k)\}$ из этого отрезка с $\sum\limits_k (b_k-a_k) < \delta$ выполнено условие $\sum\limits_k |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$.

Из теоремы Лагранжа следует, что $C^{(1)}([a,b]) \subset AC([a,b])$.

Лемма 11.1. *Если $f(x) \in L([a,b])$, то функция*

$$F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(x)\,d\mu$$

абсолютно непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется такое $\delta > 0$, что если $\mu E < \delta$, то

$$\int\limits_E |f(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Если теперь $\{(a_k,b_k)\}$ — система попарно непересекающихся интервалов из $[a,b]$ с $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$, то

$$\sum_k |F(b_k)-F(a_k)| = \sum_k \left|\int\limits_{(a_k,b_k)} f(x)\,d\mu\right| \leqslant \sum_k \int\limits_{(a_k,b_k)} |f(x)|\,d\mu = \int\limits_{\bigsqcup_k (a_k,b_k)} |f(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 11.2. *Абсолютно непрерывная функция на отрезке имеет на этом отрезке ограниченную вариацию.*

Доказательство.
По определению абсолютной непрерывности, существует такое $\delta > 0$, что если $\{(a_k, b_k)\}$ — попарно непересекающиеся интервалы с $\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \delta$, то $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant 1$. Тогда для любого $\xi \leqslant \delta$ и для любого $c \in [a, b - \xi]$ выполнена оценка $V_c^{c+\xi}(f) \leqslant 1$. Разбивая отрезок $[a,b]$ на $n = \lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil$ подотрезков длины, не большей δ, получим, что вариация f на $[a,b]$, равная сумме вариаций на этих подотрезках, не превосходит n.

Следствие. *Если $f \in AC([a,b])$, то она дифференцируема почти всюду на этом отрезке и $f' \in L([a,b])$.*

Лемма 11.3. *Если $f, g \in AC([a,b])$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g \in AC([a,b])$.*

Доказательство.
Пусть $h(x) = \alpha f(x)$. Если $\alpha = 0$, то очевидно, что $h \in AC$. Иначе для любой системы интервалов из того, что $\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ следует, что $\sum |h(b_k) - h(a_k)| < \varepsilon$. Пусть теперь $h(x) = f(x) + g(x)$. По неравенству треугольника

$$|h(b_k) - h(a_k)| \leqslant |f(b_k) - f(a_k)| + |g(b_k) - g(a_k)|,$$

Поэтому, если $\sum_k (b_k - a_k)$ меньше столь малого $\delta > 0$, что $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\sum_k |g(b_k) - g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$\sum_k |h(b_k) - h(a_k)| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 11.1. *Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f'(x) = 0$ п.в. на $[a,b]$. Тогда $f(x)$ постоянна на $[a,b]$.*

Доказательство.
Пусть $E = \{x : \exists f'(x) = 0\}$. Для $\varepsilon > 0$ в силу абсолютной непрерывности функции найдется такое $\delta > 0$, что для любой системы попарно непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}$ из этого отрезка с $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$ выполнено условие $\sum\limits_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Далее, для любой точки $x \in E$ найдется такое $h_0 = h_0(x)$, что при $0 < h < h_0$ выполнена оценка $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon h$. Заметим, что система отрезков $\{[x, x+h]\}_{x \in E, 0 < h < h_0(x)}$ покрывает измеримое множество E в смысле Витали. Согласно теореме Витали, из нее можно выбрать систему $\{D_k\}$ попарно непересекающихся отрезков, для которых

$$\mu\left(E \setminus \bigsqcup_k D_k\right) = 0.$$

Так как ряд из мер D_k сходится, то можно выбрать такое N, что

$$\mu\left(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^N D_k\right) < \delta.$$

Но $\mu([a,b] \setminus E)$ =0 по условию. Поэтому

$$\mu\left([a,b] \setminus \bigsqcup_{k=1}^N D_k\right) < \delta.$$

Это множество является конечным объединением промежутков. Действительно, пусть $D_k = [x_k, x_k + h_k]$, где $x_k + h_k < x_{k+1}$. Тогда

$$[a, b] \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} D_k = [a, x_1) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{N-1} (x_k + h_k, x_{k+1}) \sqcup (x_N + h_N, b].$$

В силу выбора δ

$$|f(x_1) - f(a)| + \sum_{k=1}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k + h_k)| + |f(b) - f(x_N + h_N)| < \varepsilon.$$

С другой стороны, так как $h_k < h_0(x_k)$, то

$$\sum_{k=1}^{N} |f(x_k + h_k) - f(x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \varepsilon h_k \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Складывая эти оценки, получим по неравенству треугольника, что $|f(b) - f(a)| < \varepsilon(1 + b - a)$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $f(b) = f(a)$. Но приведенные рассуждения применимы и к любому отрезку $[a, c]$, где $a < c < b$. Поэтому $f(x) \equiv f(a)$ на $[a, b]$. Теорема доказана.

Теорема 11.2. *Пусть* $f \in L([a, b])$ *и*

$$\Phi(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t)\, d\mu(t).$$

Тогда $\Phi'(x) = f(x)$ *почти всюду.*

Доказательство.

Функция Φ абсолютно непрерывна по лемме 11.1 и почти всюду дифференцируема по следствию из леммы 11.2. Пусть p и q —два вещественных числа, причем $p < q$. Положим

$$E_{p,q} = \{x \in (a, b) \,:\, \Phi'(x) > q > p > f(x)\}$$

(рассматриваются только точки, где Φ' существует). Множества $E_{p,q}$ измеримы в силу измеримости Φ' и f. Докажем, что это множество имеет меру нуль. Для заданного $\varepsilon > 0$, согласно свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега, найдется такое число $\delta > 0$, что если $\mu(E) < \delta$, то

$$\left| \int\limits_E f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Построим такое открытое множество G, что $E_{p,q} \subseteq G \subseteq (a, b)$ и $\mu(G) < \mu(E_{p,q}) + \delta$. Для любой точки $x \in E_{p,q}$ найдется такое $h_0 = h_0(x)$, что при $0 < h \leqslant h_0$ выполнены условия $[x, x + h] \subset G$ и

$$\frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h} > q.$$

Отрезки $\{[x, x+h]\}_{x \in E_{p,q}, 0<h<h_0(x)}$ покрывают множество $E_{p,q}$ в смысле Витали. Выберем, опираясь на теорему Витали, такую последовательность отрезков $\{[x_k, x_k + h_k]\}$, что

$$\mu\left(E_{p,q} \setminus \bigsqcup_{k} [x_k, x_k + h_k] \right) = 0.$$

Тогда
$$\Phi(x_k+h_k)-\Phi(x_k)=\int\limits_{[x_k,x_k+h_k]} f(t)\,d\mu(t)>qh_k,$$
и если положить $S=\bigsqcup_k [x_k,x_k+h_k]$, то $\mu(S)\geqslant \mu E_{p,q}$ и
$$\int\limits_S f(t)\,d\mu(t)=\sum_k \int\limits_{[x_k,x_k+h_k]} f(t)\,d\mu(t)>q\mu(S)\geqslant q\mu(E_{p,q}).$$
С другой стороны, так как $S\subseteq G$, то $\mu(S\setminus E_{p,q})\leqslant \mu(G\setminus E_{p,q})<\delta$, а тогда
$$\int\limits_S f(t)\,d\mu(t)=\int\limits_{E_{p,q}} f(t)\,d\mu(t)+\int\limits_{S\setminus E_{p,q}} f(t)\,d\mu(t)-\int\limits_{E_{p,q}\setminus S} f(t)\,d\mu(t)<\int\limits_{E_{p,q}} f(t)\,d\mu(t)+\varepsilon.$$
Учитывая оценку функции f на множестве $E_{p,q}$, получаем, что
$$\int\limits_S f(t)\,d\mu(t)\leqslant p\mu E_{p,q}+\varepsilon.$$
Объединяя эти оценки, получим, что
$$q\mu(E_{p,q})\leqslant p\mu(E_{p,q})+\varepsilon.$$
Так как $\varepsilon>0$ произвольно, а $p<q$, то $\mu(E_{p,q})=0$. Теперь, если
$$E=\{x\,:\,\exists\Phi'(x)\text{ и }\Phi'(x)>f(x)\},$$
то
$$E=\bigcup_{p,q\in\mathbb{Q},\,p<q} E_{p,q},$$
а тогда $\mu(E)=0$, то есть $\Phi'(x)\leqslant f(x)$ почти всюду. Применяя этот факт к функции $-f(x)$, получим, что $\Phi'(x)\geqslant f(x)$ почти всюду. Поэтому $\Phi'(x)=f(x)$ почти всюду. Теорема доказана.

Теорема 11.3. *Абсолютно непрерывная на отрезке функция является неопределенным интегралом Лебега своей производной, т.е. для абсолютно непрерывной функции справедлива формула Ньютона — Лейбница*
$$F(b)-F(a)=\int\limits_{[a,b]} F'(t)\,d\mu(t).$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ абсолютно непрерывна. По следствию из леммы 11.2 определена функция
$$\Phi(x)=F(a)+\int\limits_{[a,x]} F'(t)\,d\mu(t).$$
По теореме 11.2 $\Phi'(x)=F'(x)$ почти всюду, но по лемме 11.1 функция Φ абсолютно непрерывна. Тогда $G(x)=F(x)-\Phi(x)$ — абсолютно непрерывная функция по лемме 11.3, и $G'(x)=0$ почти всюду. По теореме 11.1 $G(x)=G(a)=0$ для всех x, что и требовалось доказать.