Лекция по действительному анализу 20 апреля 2020 года, мехмат, 2 курс, 2 поток.

Тема 9 : Заряды.(продолжение).
Тема 10: Функции ограниченной вариации.

Заряды, представимые в виде интеграла Лебега от фиксированной функции по переменному множеству, допускают полное описание, к которому мы сейчас перейдем. Рассматриваемые меры предполагаются σ-аддитивными.

Определение. Заряд Φ на σ-алгебре M называется абсолютно непрерывным относительно меры μ на M, если для любого $E \in M$ с $\mu E = 0$ выполнено равенство $\Phi(E) = 0$.

Лемма 9.3. *Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой, Φ — σ-аддитивная мера на M, абсолютно непрерывная относительно меры μ и не равная нулю тождественно. Тогда найдутся такое $n \in \mathbb{N}$ и такое множество $B \in M$, что $\mu(B) > 0$ и B положительно относительно заряда $\Phi_n = \Phi - \frac{1}{n}\mu$.*

Доказательство.
Пусть $X = A_n^- \sqcup B_n^+$ — разложение Хана для заряда Φ_n. Положим

$$A_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^-, \qquad B_0 = X \setminus A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^+.$$

Тогда при каждом n выполнено неравенство $\Phi(A_0) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A_0)$, то есть $\Phi(A_0) = 0$. Поскольку мера Φ не тождественно нулевая, то $\Phi(B_0) > 0$, а тогда в силу абсолютной непрерывности и $\mu(B_0) > 0$. Поскольку мера μ счетно-аддитивна, то найдется n, для которого $\mu(B_n^+) > 0$. Взяв это n и множество $B = B_n^+$, получим утверждение леммы.

Теорема 9.3. *(Теорема Радона — Никодима.) Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой. Заряд Φ на M абсолютно непрерывен относительно μ тогда и только тогда, когда существует такая функция $f \in L(X, M, \mu)$, что*

$$\Phi(A) \equiv \int_A f(x)\, d\mu.$$

Доказательство.
Условие достаточно, потому что интеграл Лебега по множеству меры нуль равен нулю.

Пусть Φ — заряд, абсолютно непрерывный относительно меры μ, а $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$ — его разложение Жордана. Тогда меры Φ_+ и Φ_- также абсолютно непрерывны относительно μ. Действительно, если $X = A_- \sqcup B_+$ — соответствующее разложение Хана, $E \in M$, $\mu(E) = 0$, то $\Phi_+(E) = \Phi(E \cap B_+)$, где $\mu(E \cap B_+) = 0$, и потому $\Phi_+(E) = 0$. Таким образом, достаточно доказать теорему для случая, когда заряд является мерой, а затем взять разность полученных функций.

Рассмотрим множество функций

$$K = \Big\{ f \in L(X, M, \mu) \,:\, f(x) \geqslant 0, \int_A f(x)\, d\mu \leqslant \Phi(A) \quad \text{для всех } A \in M. \Big\}$$

Оно не пусто, так как $f(x) \equiv 0 \in K$. Пусть

$$S = \sup_{f \in K} \int_X f(x)\, d\mu.$$

Докажем, что этот супремум достигается. Найдется последовательность функций $f_n \in K$, на которой эта точная верхняя грань реализуется, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu = S.$$

Рассмотрим функции

$$g_n(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Покажем, что $g_n \in K$. Действительно, если $E \in M$, то его можно представить в виде $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, где $g_n(x) = f_k(x)$ на E_k и

$$E_k = \bigcap_{j=1}^{k-1}\{x \in E \,:\, f_j(x) < f_k(x)\} \cap \bigcap_{j=k+1}^{n}\{x \in E \,:\, f_j(x) \leqslant f_k(x)\} \in M$$

по свойствам измеримых функций, а тогда

$$\int\limits_E g_n(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{E_k} g_n(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{E_k} f_k(x)\,d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Phi(E_k) = \Phi(E).$$

Поскольку $g_n(x) \geqslant f_n(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu = S.$$

Если

$$f(x) = \sup_n f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x),$$

то по теореме Б. Леви

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X g_n(x)\,d\mu = S,$$

а применяя ту же теорему к произвольному множеству $E \in M$, получим, что

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E g_n(x)\,d\mu \leqslant \Phi(E),$$

то есть что $f \in K$. Поэтому заряд

$$\lambda(E) = \Phi(E) - \int\limits_E f(x)\,d\mu$$

является мерой (неотрицателен). Покажем, что $\lambda \equiv 0$, тогда f — искомая функция. Если это не так, то к мере λ, которая абсолютно непрерывна относительно μ, применима лемма 9.3. По этой лемме, найдутся такое $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ и $B \in M$, $\mu B > 0$, что B положительно относительно заряда $\lambda - \varepsilon\mu$, т.е. при каждом $E \in M$ выполнена оценка

$$\varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant \lambda(E \cap B) = \Phi(E \cap B) - \int\limits_{E\cap B} f(x)\,d\mu.$$

Возьмем функцию $h(x) = f(x) + \varepsilon\chi_B(x)$. Тогда при каждом $E \in M$ выполнена оценка

$$\int\limits_E h(x)\,d\mu = \int\limits_E f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(E\cap B) = \int\limits_{E\setminus B} f(x)\,d\mu + \int\limits_{E\cap B} f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(E\cap B) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E\setminus B} f(x)\,d\mu + \Phi(E\cap B) \leqslant \Phi(E\setminus B) + \Phi(E\cap B) = \Phi(E),$$

то есть $h \in K$. В то же время,

$$\int\limits_X h(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(B) = S + \varepsilon\mu(B) > S,$$

что противоречит определению величины S. Теорема доказана.

Тема 10: Функции ограниченной вариации

Определение. Пусть $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Положим $V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Вариацией функции f на отрезке $[a,b]$ называется

$$V_a^b f = \sup_T V_T(f).$$

Если вариация функции f конечна, то f называется функцией ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ ($f \in BV([a,b])$).

Следующие **свойства функций ограниченной вариации** считаются известными из курса математического анализа.

1. BV-функция ограничена.

2. Монотонная функция имеет ограниченную вариацию.

3. Линейная комбинация функций ограниченной вариации является функцией ограниченной вариации.

4. Если $f \in BV([a,b])$ и $c \in (a,b)$, то $f \in BV([a,c])$, $f \in BV([c,b])$ и $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$.

5. Если $c \in (a,b)$, $f \in BV([a,c])$ и $f \in BV([c,b])$, то $f \in BV([a,b])$.

6. Функция f является функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде разности двух неубывающих функций. При этом можно взять $f_1(x) = V_a^x f$, $f_2(x) = V_a^x f - f(x)$.

7. Функция ограниченной вариации имеет не более чем счетное множество точек разрыва, и все они — либо устранимые, либо первого рода.

Лемма 10.1. *Функция $f(x) \in BV([a,b])$ непрерывна слева (справа) в точке x тогда и только тогда, когда функция $f_1(x) = V_a^x f$ непрерывна слева (справа) в этой точке.*

Доказательство.
Рассмотрим для определенности поведение функции справа от точки.

Так как $|f(x+t)-f(x)| \leqslant V_x^{x+t} f$, то из непрерывности f_1 следует непрерывность f. Пусть теперь f непрерывна справа. Предположим, что f_1 разрывна. В силу ее монотонности это означает, что существует

$$\lim_{t\to+0} f_1(x+t) = f_1(x+0) = f_1(x) + \varepsilon, \qquad \text{где } \varepsilon > 0.$$

Выберем такое $h > 0$, что $f_1(x+h) - f_1(x) = V_x^{x+h} f < \frac{5}{4}\varepsilon$. Выберем такое разбиение $T = \{x_k\}$ отрезка $[x, x+h]$, что $V_T(f) > \frac{7}{8}\varepsilon$. Добавляя к T, если нужно, еще одну точку, достаточно близкую к $x = x_0$, можно считать в силу непрерывности f, что $|f(x_1) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$, а тогда

$$\sum_{k=2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| > V_T(f) - |f(x_1) - f(x_0)| > \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Так как по предположению $V_x^{x_1} f \geqslant \varepsilon$, то найдется такое разбиение T' отрезка $[x, x_1]$: $x = y_0 < y_1 < \dots < y_m = x_1$, что $V_{T'}(f) > \frac{3\varepsilon}{4}$. Тогда $T \cup T'$ есть разбиение отрезка $[x, x+h]$, причем

$$V_{T\cup T'}(f) = \sum_{j=1}^{m} |f(y_j) - f(y_{j-1})| + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geqslant \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{2},$$

что противоречит выбору h. Следовательно, f_1 не может быть разрывной при непрерывной f. Лемма доказана.

Интеграл Римана—Стилтьеса и интеграл Лебега

Определение. Пусть f и φ — две функции на отрезке $[a, b]$, а $T = (\{x_k\}, \{\xi_k\})$ — размеченное разбиение этого отрезка. Тогда интегральной суммой Римана — Стилтьеса называется величина

$$S_T(f, d\varphi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})).$$

Если существует предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю, то он называется интегралом Римана — Стилтьеса от f по φ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\varphi(x) \text{ или } (RS)\int\limits_a^b f(x)\, d\varphi(x),$$

а функция f называется интегрируемой по Риману — Стилтьесу по φ на отрезке.

Отметим простейшие свойства интеграла Римана — Стилтьеса.

1. Линейность по f.
2. Линейность по φ.
3. При $\varphi(x) = x$ совпадает с обычным интегралом Римана.

Для того, чтобы класс функций f оказался достаточно широким, в качестве функции φ следует брать, как мы увидим ниже, функцию ограниченной вариации.

Пусть φ — неубывающая непрерывная слева функция на $[A, B]$. Тогда на полукольце полуинтервалов, вложенных в $[A, B)$, можно определить меру Стилтьеса:

$$m_\varphi[a, b) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Мера Стилтьеса является σ-аддитивной мерой. Продолжение этой меры по Лебегу называется мерой Лебега — Стилтьеса, мы будем обозначать его через μ_φ. Интеграл по такой мере иногда называют интегралом Лебега — Стилтьеса, хотя с формальной точки зрения это обычный интеграл Лебега для некоторых мер.

Теорема 10.1. *Пусть φ — неубывающая непрерывная слева функция на $[a, b]$, а функция f ограничена на $[a, b]$ и непрерывна μ_φ-почти всюду на $[a, b)$. Тогда существует интеграл Римана — Стилтьеса от f по φ, причем*

$$(RS)\int\limits_a^b f(x) d\varphi(x) = (L)\int\limits_{[a,b)} f(x)\, d\mu_\varphi.$$

Доказательство.
Рассмотрим произвольную последовательность $\{T^m\}$ размеченных разбиений отрезка с диаметрами, стремящимися к нулю: $T^m = (\{x_k^m\}, \{\xi_k^m\})$. Положим

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\chi_{[x_{k-1}^m, x_k^m)}(x).$$

Тогда

$$S_{T^m}(f, d\varphi) = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)(\varphi(x_k^m) - \varphi(x_{k-1}^m)) = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\mu_\varphi[x_{k-1}^m, x_k^m) = (L)\int\limits_{[a,b)} f_m(x)\,d\mu_\varphi.$$

Заметим, что $f_m(x) - f(x) = f(\xi_k^m) - f(x)$, где $|x - \xi_k^m|$ не превосходит диаметра разбиения T^m. Поэтому в каждой точке непрерывности функции f выполняется условие $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$. Если $|f(x)| \leqslant C$, то и $|f_m(x)| \leqslant C$. Но $\mu_\varphi[a,b) < \infty$. Поэтому если функция f непрерывна почти всюду, то применима теорема Лебега о предельном переходе с мажорантой $g(x) \equiv C$, то есть

$$\lim_{m\to\infty} S_{T^m}(f, d\varphi) = \lim_{m\to\infty} (L)\int\limits_{[a,b)} f_m(x)\,d\mu_\varphi = (L)\int\limits_{[a,b)} f(x)\,d\mu_\varphi.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\varphi \in BV([a,b])$ — непрерывная слева функция, а f — непрерывная функция на $[a,b]$. Тогда существует $(RS)\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$.*

Доказательство.
Согласно свойству 6 существует разложение функции φ в разность двух неубывающих функций: $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, причем в силу леммы 10.1 эти функции можно считать также непрерывными слева. По теореме 10.1 существуют интегралы Римана — Стилтьеса

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi_1(x) \text{ и } \int\limits_a^b f(x)\,d\varphi_2(x).$$

В силу линейности интеграла Римана — Стилтьеса существует и интеграл по φ.

Замечание. Можно показать, что условие непрерывности слева функции φ в следствии излишне (при непрерывных f).

Теория меры и дифференцируемость

Определение. Пусть E — множество на прямой. Скажем, что система невырожденных отрезков T покрывает его в смысле Витали, если для любой точки $x \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой отрезок $I \in T$, что $x \in I$ и $|I| = \mu(I) < \varepsilon$.

Теорема 10.2. *(Теорема Витали.) Пусть ограниченное множество E покрыто системой отрезков T в смысле Витали. Тогда можно выбрать не более чем счетный набор $\{I_k\} \subseteq T$ попарно непересекающихся отрезков, для которого*

$$\mu^*(E \setminus \bigsqcup_n I_n) = 0.$$

Основные идеи доказательства:

1) Если n отрезков взяты, то не пересекающиеся с ними покрывают весь остаток.

2) Если брать каждый раз близко к максимально возможной длине, то эта длина будет стремиться к нулю.

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что и E, и все отрезки системы лежат в некотором отрезке $[a,b]$. Действительно, в силу ограниченности множество E лежит в некотором отрезке $[a',b']$. Если выкинуть из T все отрезки, длина которых больше или равна 1, то оставшиеся отрезки по-прежнему будут покрывать E в смысле Витали. После этого, можно удалить из T все отрезки, не вложенные в $[a'-1,b'+1]$, так как если $|I|<1$ и $I \not\subseteq [a'-1,b'+1]$, то $I \cap [a',b'] = \varnothing$ и тем более $I \cap E = \varnothing$, то есть этот отрезок бесполезен для покрытия.

Пусть $T_0 = T$ и $A_1 = \sup_{I \in T_0} \mu(I)$. Тогда $A_1 < b-a$. Выберем отрезок $I_1 \in T_0$, для которого $\mu(I_1) > \frac{1}{2}A_1$. Положим $T_1 = \{I \in T_0 \,:\, I \cap I_1 = \varnothing\}$.

Пусть уже выбраны непересекающиеся отрезки I_k, $k=1,\ldots,n$, и системы T_k, $T_0 \supseteq T_1 \supset \cdots \supseteq T_n$. Если $T_n = \varnothing$, то процесс выбора на этом заканчивается. В противном случае, положим $A_{n+1} = \sup_{I \in T_n} \mu(I)$ и выберем отрезок $I_{n+1} \in T_n$, для которого $\mu(I_{n+1}) > \frac{1}{2}A_{n+1}$. Положим $T_{n+1} = \{I \in T_n \,:\, I \cap I_{n+1} = \varnothing\}$.

Таким образом, по индукции мы построили конечную или счетную систему попарно непересекающихся отрезков $Q = \{I_k\}$ и последовательность вложенных систем отрезков $\{T_k\}$. Поскольку $\bigsqcup\limits_k I_k \subseteq [a,b]$, то в случае счетной системы $\mu(I_k) \to 0$ при $k \to \infty$, а тогда и $A_k \to 0$ при $k \to \infty$, ведь $0 < A_k \leqslant 2\mu(I_k)$.

Покажем, что система $\{I_k\}$ удовлетворяет условиям теоремы.

Рассмотрим сначала случай конечной системы. Тогда множество $F = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} I_k$ замкнуто. Если найдется точка $x_0 \in E \setminus F$, то расстояние от x_0 до F положительно: пусть оно есть $\delta > 0$. Согласно определению покрытия по Витали найдется отрезок $I \in T$, для которого $\mu(I) < \delta$. Но тогда I не пересекается с $I_1,\ldots,I_n$, что противоречит пустоте T_{n+1}. Таким образом, в этом случае $E \subseteq F$.

Пусть теперь система $\{I_k\}$ счетна. Положим $S = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$. Обозначим через $5I_k$ отрезок с тем же центром, что и I_k, но в пять раз больший по длине. Пусть $x \in E \setminus S$ и $l \in \mathbb{N}$. Так как множество $F_l = \bigsqcup\limits_{k=1}^{l} I_k$ замкнуто и не содержит точку x, то, как и в предыдущем случае, найдется $I(x,l) \in T_l$, содержащий точку x. В то же время, при достаточно большом $k > l$ имеет место оценка $\mu(I(x,l)) > A_k$, то есть $I(x,l) \notin T_k$. Следовательно, найдется $m > l$, для которого $I(x,l) \in T_{m-1} \setminus T_m$. Тогда $I(x,l) \cap I_m$ не пусто и $\mu(I(x,l)) < A_m < 2\mu(I_m)$. Как следствие, $I(x,l) \subseteq 5I_m$.

Таким образом, мы показали, что для любого l выполнено вложение

$$E \setminus S \subseteq \bigcup_{m=l}^{\infty} 5I_m.$$

Следовательно,

$$\mu^*(E \setminus S) \leqslant \sum_{m=l}^{\infty} \mu(5I_m) = 5\sum_{m=l}^{\infty} \mu(I_m).$$

Но из условия $\bigsqcup\limits_k I_k \subseteq [a,b]$ следует, что ряд $\sum_k \mu(I_k)$ сходится, а тогда его остаток стремится к нулю. Итак, $\mu^*(E \setminus S) = 0$. Теорема доказана.