Лекция по действительному анализу 13 апреля 2020 года, мехмат, 2 курс, 2 поток.

Тема 8 : Пространства L_p (продолжение).

Определение. Нормированным пространством называется пара $(E, \|\cdot\|)$, где E — линейное пространство над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), а $\|\cdot\|$ — норма, т.е. отображение E в множество неотрицательных чисел, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

(2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ при всех $x \in E$ и $a \in \mathbb{R}$ (соответственно, $\mathbb{C}$).

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in E$.

Мы будем рассматривать вещественный случай.

Определение. Пусть задано пространство с мерой (X, M, μ), и $p \geqslant 1$. Положим

$$\widehat{L}_p(X) = \{f \,:\, f(x) \text{ измерима}, |f|^p \in L(X)\}$$

и обозначим

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Свойство (2) выполнено, поскольку

$$\int\limits_X |af(x)|^p \, d\mu = |a|^p \int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu,$$

а свойство (3) выполнено в силу неравенства Минковского (теорема 8.2). В то же время нетрудно видеть, что свойство (1) вообще говоря, нарушено, поскольку, например, для стандартной меры Лебега найдется ненулевая функция f, эквивалентная нулю, и для нее $\|f\|_p = 0$. Поэтому $\widehat{L}_p(X)$ — не нормированное пространство.

Определение. Пусть $L^0(X) = \{f \,:\, f(x) \text{ измерима}, f \sim 0\}$. Нормированным пространством $L_p(X) = L_p(X, M, \mu)$ называется фактор-пространство $\widehat{L}_p(X)/L^0(X)$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Проверим корректность этого определения. Действительно, любая эквивалентная нулю функция после возведения в любую степень p интегрируема. Эквивалентные нулю функции образуют линейное подпространство в $\widehat{L}_p$, поэтому факторизация даёт линейное пространство.

Свойство (1) теперь выполнено, так как все функции из $\widehat{L}_p$ с нулевой нормой эквивалентны нулю. Покажем, что если $f \sim g$, то $\|f\|_p = \|g\|_p$. Из неравенства Минковского, как и из любого неравенства треугольника, следует, что

$$|\, \|f\|_p - \|g\|_p \,| \leqslant \|f - g\|_p = 0.$$

Таким образом, норма определена корректно. Свойства нормы (2) и (3) выполнены для L_p, так как они выполнены для $\widehat{L}_p$ и норма не зависит от выбора элемента класса.

Наряду с пространствами L_p определяется также пространство существенно ограниченных функций L_∞.

Определение. Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой. Положим

$$\widehat{L}_\infty(X) = \{f \,:\, f(x) \text{ измерима}, \, \exists\, g \sim f \,:\, g \text{ ограничена}\},$$
$$L^0(X) = \{f \,:\, f(x) \text{ измерима}, \, f \sim 0\}.$$

Тогда пространством $L_\infty(X) = L_\infty(X, M, \mu)$ называется $\widehat{L}_\infty(X)/L^0(X)$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \inf_{g\sim f} \sup_{x\in X} |g(x)|.$$

Лемма 8.2. *Для любой функции (класса эквивалентности) $f \in L_\infty(X)$*

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \,:\, \mu\{x \,:\, |f(x)| > c\} = 0\}.$$

Доказательство.
Если $\mu\{x \,:\, |f(x)| > c\} = 0$, то можно переопределить функцию на множестве меры нуль так, чтобы она не превосходила c по модулю. Поэтому точная верхняя грань из определения не больше, чем точная верхняя грань из формулировки. Обратно, если некоторая функция $g \sim f$ ограничена по модулю величиной c, то f может превосходить c лишь на множестве меры нуль. Лемма доказана.

Полнота пространств L_p.

Определение. Последовательность точек $\{x_n\}$ нормированного пространства E называется сходящейся к точке x, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ выполняется неравенство $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Последовательность точек $\{x_n\}$ нормированного пространства E называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n, m > N$ выполняется неравенство $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Нормированное пространство называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Для доказательства полноты пространств L_p установим вспомогательные утверждения.

Лемма 8.3. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда и вся последовательность $\{x_n\}$ сходится.*

Доказательство.
Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое K, что при $k > K$ выполняется неравенство $\|x_{n_k} - x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Затем найдем такое N, что при $n, m > N$ выполнено неравенство $\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $n > N$, фиксируя $n_k > N$ с $k > K$,имеем

$$\|x_n - x\| \leqslant \|x_{n_k} - x\| + \|x_{n_k} - x_n\| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 8.4. *Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ фундаментальна в пространстве $L_1(X)$. Тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящаяся п.в. на X.*

Доказательство.
По индукции построим такую строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$, что для любого $n > n_k$ выполнено неравенство

$$\|f_{n_k} - f_n\|_1 = \int\limits_X |f_{n_k}(x) - f_n(x)|\, d\mu < \frac{1}{2^k}$$

(это можно сделать в силу фундаментальности). В частности, тогда $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_1 < \frac{1}{2^k}$. Положим

$$g_m(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{m-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Тогда $0 \leqslant g_m(x) \leqslant g_{m+1}(x)$ и при каждом m

$$\int\limits_X g_m(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_X |f_{n_1}(x)|\,d\mu + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^k} \leqslant \int\limits_X |f_{n_1}(x)|\,d\mu + 1.$$

По теореме Б. Леви последовательность $\{g_m(x)\}$ сходится почти всюду к конечному пределу. Тогда сходится почти всюду и ряд

$$|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|,$$

частичными суммами которого являются g_m, а тем более — ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)),$$

частичными суммами которого являются f_{n_m}. Лемма доказана.

Лемма 8.5. *Пусть $\mu X < \infty$ и $p > 1$. Тогда $L_p(X) \subseteq L_1(X)$, причем найдется такое C, что для любой $f \in L_p(X)$ выполнена оценка $\|f\|_1 \leqslant C\|f\|_p$.*

Доказательство.
Возьмем $q = \frac{p}{p-1}$. Тогда, применяя неравенство Гельдера к функции $|f|$ и тождественной единице, получим, что

$$\int\limits_X |f(x)|\,d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_X 1^q\,d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p(\mu X)^{1/q}.$$

Лемма доказана.

Теорема 8.3. *Пусть (X, M, μ) — пространство с полной мерой, и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда пространство $L_p(X, M, \mu)$ полно.*

Доказательство.
Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $L_p(X, M, \mu)$.

Докажем вначале, что найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся почти всюду. При $p = 1$ это доказано в лемме 8.4. Пусть $p > 1$ и $\mu X < \infty$. Тогда по лемме 8.5 последовательность является фундаментальной и в $L_1(X)$, а тогда по лемме 8.4 существует подпоследовательность, сходящаяся почти всюду.

Пусть, наконец, $p > 1$ и $\mu X = \infty$. Возьмем представление $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $\mu A_k < \infty$. Поскольку для любой неотрицательной функции g при всех k выполнено неравенство

$$\int\limits_{A_k} g(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_X g(x)\,d\mu,$$

то последовательность $\{f_n\}$ (и любая ее подпоследовательность) будет фундаментальна в каждом пространстве $L_p(A_k)$. По доказанному можно выбрать такую подпоследовательность $\{n_k^1\}$, что $\{f_{n_k^1}\}$, сходится п.в. на A_1. Из нее можно выбрать такую подпоследовательность $\{n_k^2\}$, что $\{f_{n_k^2}\}$ сходится п.в. и на A_2, и так далее по индукции. Диагональная подпоследовательность $\{f_{n_k^k}\}$ будет сходиться почти всюду на X (всюду, кроме счетного объединения множеств меры нуль).

Итак, мы нашли подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая сходится почти всюду. Но она фундаментальна в L_p, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер K, что при всех $k, m > K$ выполнено неравенство

$$\int\limits_X |f_{n_k}(x) - f_{n_m}(x)|^p\,d\mu \leqslant \varepsilon^p.$$

Зафиксируем k и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Подынтегральные функции неотрицательны и почти всюду сходятся к $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p$. По теореме Фату (теорема 6.3) получаем, что $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \in L(X)$ и при всех $k > K$ выполнено неравенство

$$\int\limits_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon^p.$$

Таким образом, $f_{n_k} - f \in L_p$ (а тогда и $f \in L_p$ по неравенству Минковского), и $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$ при $k \to \infty$. По лемме 8.3 отсюда следует, что $\|f_n - f\|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Тема 9 : Заряды.

До сих пор мы рассматривали меры — неотрицательные аддитивные функции множества. Но в приложениях важен и случай аддитивной функции множества, принимающей значения любого знака. Мы будем сразу предполагать счетную аддитивность.

Определение. Пусть M — σ-алгебра с единицей X (элементы M будем называть измеримыми множествами). Функция Φ, действующая из M в $\mathbb{R}$, называется зарядом, если она удовлетворяет условию σ-аддитивности, то есть для любых таких A, A_n из M, что $A = \bigsqcup_n A_n$ (конечное или счетное объединение), выполнено условие

$$\Phi(A) = \sum_n \Phi(A_n),$$

где ряд абсолютно сходится.

Для зарядов выполнены те свойства σ-аддитивных мер, которые не связаны с неотрицательностью, например, непрерывность. В отличие от мер, у зарядов не допускаются бесконечные значения, так как это может привести к неопределенностям типа $\infty + (-\infty)$.

Определение. Множество $A \in M$ называется положительным (отрицательным) относительно заряда Φ, если для любого $B \in M$, вложенного в A, выполнено неравенство $\Phi(B) \geqslant 0$ (соответственно, $\Phi(B) \leqslant 0$).

Из определения сразу следует, что подмножество положительного/отрицательного множества, тоже лежащее в M — само положительно/отрицательно.

Нетрудно видеть, что сужение заряда на положительное множество A (точнее, на $M|_A$) является мерой, а сужение заряда на отрицательное множество — «минус мерой». Мы докажем, что всю единицу X можно поделить на две части, на которых сосредоточены положительная и отрицательная составляющие заряда.

Лемма 9.1. *Пусть множества A_n — отрицательные относительно Φ. Тогда $A = \bigcup_n A_n$ — отрицательное.*

Доказательство.
Заметим, что все множества

$$E_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

измеримы, они отрицательны как подмножества отрицательного множества, и $A = \bigsqcup_n E_n$. Поэтому для любого множества $G \in M$, вложенного в A, имеем:

$$\Phi(G) = \sum_n \Phi(G \cap E_n) \leqslant 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 9.2. *Если A — не положительное, то существует отрицательное $B \subset A$ такое, что $\Phi(B) < 0$.*

Доказательство.
Предположим противное. Так как A не положительно, то найдется такое измеримое $C_0 \subseteq A$, что $\Phi(C_0) < 0$. Так как C_0 не отрицательно, то найдется $C_1 \subseteq C_0$ с положительным зарядом, причем его можно выбрать так, что $\Phi(C_1) \geqslant \frac{1}{k_1}$, а для $\frac{1}{k_1-1}$ такое множество выбрать уже нельзя, т.е. k_1 — минимально возможное. Так как $\Phi(C_0 \setminus C_1) < 0$, то можно повторить эту процедуру и выбрать такое $C_2 \subseteq C_0 \setminus C_1$, что $\Phi(C_2) \geqslant \frac{1}{k_2}$, а для $\frac{1}{k_2-1}$ такого C_2 не существует, т.е. k_2 — минимально возможное. Продолжим этот процесс по индукции и положим $F_0 = C_0 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Заметим, что при этом $k_i \to \infty$, так как

$$\sum_i \frac{1}{k_i} \leqslant \sum_i \Phi(C_i) = \Phi\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) < +\infty.$$

Так как $\Phi(C_0) < 0$, а $\Phi(C_i) > 0$ при $i > 0$, то $\Phi(F_0) < 0$. В то же время F_0 отрицательно, так как если нашлось бы $F \subset F_0$ с $\Phi(F) > \frac{1}{n} > 0$, то это бы противоречило выбору k_i (как минимально возможного) при $k_i > n$.

Лемма доказана.

Теорема 9.1. *(Разложение Хана.) Пусть Φ — заряд на M. Тогда существует такое отрицательное множество A_-, что множество $B_+ = X \setminus A_-$ положительно. Представление $X = B_+ \sqcup A_-$ и называется разложением Хана.*

Доказательство.
Пусть $a = \inf \Phi(A)$, где нижняя грань берется по всем отрицательным множествам $A \in M$. Выберем такие отрицательные множества A_n, что $\Phi(A_n) \to a$, и определим $A_- = \bigcup_n A_n$. Тогда по лемме 9.1 A_- отрицательно. В то же время при каждом n имеет место неравенство $\Phi(A_-) = \Phi(A_n) + \Phi(A_- \setminus A_n) \leqslant \Phi(A_n)$, так как $\Phi(A_- \setminus A_n) \leqslant 0$. Следовательно, $\varphi(A_-) = a$, в частности, $a > -\infty$.

Докажем, что множество $B_+ = X \setminus A_-$ положительно. Предположим, что это не так. Тогда по лемме 9.2 найдется отрицательное $C \subseteq B_+$ с $\Phi(C) < 0$. При этом $A_- \sqcup C$ будет отрицательным с $\Phi(A_- \sqcup C) = \Phi(A_-) + \Phi(C) < \Phi(A_-) = a$, что противоречит выбору a. Итак, B_+ положительно. Теорема доказана.

Определение. Пусть Φ — заряд на σ-алгебре M с единицей X. Представление его в виде разности двух конечных σ-аддитивных мер $\Phi = \mu_+ - \mu_-$ называется разложением Жордана, если существует такое множество $B \in M$, что $\mu_-(B) = 0$, $\mu_+(X \setminus B) = 0$.

Каждое разложение Хана $X = B_+ \sqcup A_-$ для заряда определяет разложение Жордана этого заряда по формулам:

$$\Phi(E) = \Phi_+(E) - \Phi_-(E), \qquad \Phi_+(E) = \Phi(E \cap B_+), \quad \Phi_-(E) = -\Phi(E \cap A_-) \qquad (*)$$

(при этом $B = B_+$).

Заряд можно и другими способами представить в виде разности двух мер. С другой стороны, для заряда может существовать более одного разложения Хана, и даже бесконечно много.

Теорема 9.2. *Разложение Жордана для заряда единственно.*

Доказательство.
Пусть задано разложение Жордана. Положим $B_+ = B$, $A_- = X \setminus B$. Тогда $X = B_+ \sqcup A_-$ — разложение Хана, порождающее исходное разложение Жордана по формуле $(*)$. Действительно, для $E \subset B$ имеем $\Phi(E) = \mu_+ E - \mu_- E = \mu_+ E \geqslant 0$, т.к. $\mu_- E = 0$, а для $E \subset X \setminus B$ имеем $\Phi(E) = \mu_+ E - \mu_- E = -\mu_- E \leqslant 0$, т.к. $\mu_+ E = 0$. Итак, по определению B_+ положительно, а A_- отрицательно. При этом для любого E

$\Phi_+(E) = \Phi(E\cap B_+) = \mu_+(E\cap B_+) - \mu_-(E\cap B_+) = \mu_+(E\cap B_+) = \mu_+E - \mu_+(E\cap A_-) = \mu_+E$. т.е. $\Phi_+ = \mu_+$, и аналогично $\Phi_- = \mu_-$.

Пусть теперь есть два разложения Хана:

$$X = A_- \sqcup B_+ = C_- \sqcup D_+.$$

Тогда для для любого $E \in M$ множество $E \cap (B_+ \setminus D_+)$ вложено, с одной стороны, в положительное множество B_+, а с другой стороны, в отрицательное множество C_-. Следовательно, $\Phi(E \cap (B_+ \setminus D_+)) = 0$. Аналогично $\Phi(E \cap (D_+ \setminus B_+)) = 0$. Поэтому для любого $E \in M$

$$\begin{aligned}\Phi(E \cap B_+) = \Phi(E \cap (B_+ \cap D_+)) + \Phi(E \cap (B_+ \setminus D_+)) = \Phi(E \cap (B_+ \cap D_+)) = \\ = \Phi(E \cap (B_+ \cap D_+)) + \Phi(E \cap (D_+ \setminus B_+)) = \Phi(E \cap D_+).\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\Phi(E \cap A_-) = \Phi(E \cap C_-).$$

Теорема доказана.

Примеры зарядов

1. Любая конечная σ-аддитивная мера на σ-алгебре является зарядом.

2. Разность (вообще, линейная комбинация) двух конечных σ-аддитивных мер на одной и той же σ-алгебре является зарядом. Например, дискретный заряд на σ-алгебре всех подмножеств X:

$$\Phi(A) = \sum_{k\,:\,x_k \in A} a_k, \qquad \text{где } x_k \in X, \quad \sum_k |a_k| < \infty.$$

3. Если (X, M, μ) — пространство с мерой, $f \in L(X, M, \mu)$, то

$$\Phi(A) = \int\limits_A f(x)\, d\mu$$

будет зарядом на M по следствию из теоремы 5.3.

Заряды из примера 3 в силу элементарных свойств интеграла Лебега удовлетворяют следующему определению.

Определение. Заряд Φ на σ-алгебре M называется абсолютно непрерывным относительно меры μ на M, если для любого $E \in M$ с $\mu E = 0$ выполнено равенство $\Phi(E) = 0$.

Нетривиальным является обратное утверждение: любой абсолютно непрерывный относительно меры заряд представляется в виде интеграла. Это мы докажем на следующей лекции.