Лекция по действительному анализу 6 апреля 2020 года, мехмат, 2 курс, 2 поток.
Тема 6 (дополнение)

Определение. Колебанием функции f в точке x называется $\omega_f(x) = \inf_{x\in I}(\sup_I f - \inf_I f)$, где I — всевозможные интервалы, содержащие эту точку.

Лемма 6.1. *Функция f непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда $\omega_f(x) = 0$.*

Доказательство.
Если в δ-окрестности значения отличаются от $f(x)$ не больше чем на ε, то друг от друга они отличаются не больше, чем на 2ε. Обратно, если значения на некотором интервале $I \ni x$ отличаются друг от друга не больше, чем на ε, то на вложенной в него δ-окрестности значения отличаются от $f(x)$ не больше чем на ε.

Теорема 6.5. *Пусть f — интегрируемая по Риману функция на $[a, b]$. Тогда она ограничена и непрерывна п.в.*

Доказательство.
Ограниченность считаем известной (если не ограничена, то суммы Дарбу бесконечны). Предположим, что функция разрывна на множестве E положительной внешней меры. Положим $E_n = \{x : \omega(x) \geqslant \frac{1}{n}\}$, тогда $E = \bigcup_n E_n$. Найдется n: $\mu^* E_n = a > 0$. Возьмем любое разбиение T. Тогда по определению внешней меры сумма длин отрезков разбиения, внутри которых есть точки из E_n, не меньше, чем a. Отсюда следует, что разность верхней и нижней суммы Дарбу не меньше, чем $\frac{a}{n}$. Теорема доказана.

Тема 7: Произведения мер

Как и в случае интеграла Римана, при изучении интеграла Лебега по декартову произведению двух множеств часто бывает удобнее представить его как повторный интеграл. В данной теме мы обсудим, при каких условиях это возможно.

Пусть заданы две или более мер m_k на полукольцах S_k. Прежде всего, рассмотрим вопрос: на какой системе множеств можно задать декартово произведение этих мер ?

Определение. Пусть S_k, $k = 1, \ldots, n$ — полукольца. Тогда их прямым произведением $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ называется система множеств, представимых в виде $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, где $A_k \in S_k$.

Лемма 7.1. *Прямое произведение полуколец является полукольцом.*

Доказательство.
Декартово произведение пустых множеств есть пустое множество. Пересечение декартовых произведений равно декартову произведению пересечений:

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = \{(x_1, \ldots x_n) : x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n,\\ x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_n\} = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n).$$

Пусть $A_k \in S_k$ и $A_k^1 \in S_k$, причем

$$A_1^1 \times \cdots \times A_n^1 \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n,$$

где множество слева непусто. Тогда при каждом k $A_k^1 \subseteq A_k$, и так как S_k — полукольца, то найдутся такие $A_k^j \in S_k$, $j = 2, \ldots, p_k$, что при каждом k выполнено равенство $A_k =$

$\bigsqcup_{j=1}^{p_k} A_k^j$. Нетрудно видеть, что

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \bigsqcup_{j_1=1}^{p_1} \cdots \bigsqcup_{j_n=1}^{p_n} (A_1^{j_1} \times \cdots \times A_n^{j_n}).$$

Все члены в правой части равенства принадлежат прямому произведению полуколец, и один из них есть наше заданное множество $A_1^1 \times \cdots \times A_n^1$. Таким образом, все свойства полукольца выполнены, и лемма доказана.

Замечание. Если накладывать на системы S_k более сильные требования, например, чтобы они были кольцами, то их прямое произведение может не оказаться кольцом. Можно лишь утверждать, что если системы S_k имеют единицы X_k, то декартово произведение единиц будет единицей прямого произведения.

Если на двух или более полукольцах заданы меры, то естественно на прямом произведении этих полуколец ввести меру-произведение следующим образом.

Определение. Пусть m_k — меры на полукольцах S_k и $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Произведением мер m_k называется функция $m = m_1 \cdots m_n$ на S, определяемая равенством

$$m(A_1 \times \cdots \times A_n) = m_1(A_1) \cdots m_n(A_n)$$

(при этом считается $0 \cdot \infty = 0$ и $a \cdot \infty = \infty$, $0 < a \leqslant \infty$).

Вначале необходимо проверить, что m — мера. Поскольку по определению

$$m_1 \cdots m_n = (\cdots((m_1 m_2) m_3) \cdots m_n),$$

то достаточно проверить это при $n = 2$. Пусть

$$A = A_1 \times A_2 = \bigsqcup_{j=1}^{m} B^j = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_1^j \times B_2^j,$$

где $A_1, B_1^j \in S_1$ и $A_2, B_2^j \in S_2$ — непустые. По лемме 1.2 найдутся такие множества $C_1^i \in S_1$ и $C_2^l \in S_2$, что $A_1 = \bigsqcup_{i=1}^{I} C_1^i$ и $A_2 = \bigsqcup_{l=1}^{L} C_2^l$, каждое из B_1^j есть объединение некоторых из C_1^i, а каждое из B_2^j есть объединение некоторых из C_2^l. Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{I} \bigsqcup_{l=1}^{L} C_1^i \times C_2^l \text{ и } mA = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} m_1(C_1^i) m_2(C_2^l).$$

С другой стороны, каждое B^j есть объединение некоторых из $C_1^i \times C_2^l$, то есть

$$B^j = \bigsqcup_{(i,l) \in M_j} C_1^i \times C_2^l, \text{ и } mB^j = \sum_{(i,l) \in M_j} m_1(C_1^i) m_2(C_2^l),$$

и так как множества B^j попарно не пересекаются и в объединении дают A, то множества пар индексов M_j попарно не пересекаются и в объединении дают все $I \cdot L$ пар. Отсюда и вытекает, что $mA = \sum_j mB^j$.

Теорема 7.1. *Произведение σ-аддитивных конечных или σ-конечных мер является σ-аддитивной мерой.*

Доказательство.

Как и в предыдущих рассуждениях, достаточно рассмотреть произведение двух мер.

Пусть m_1 и m_2 — две σ-аддитивные меры, $m = m_1 \cdot m_2$. Обозначим через μ_1 лебеговское продолжение меры m_1. Пусть $C = \bigsqcup_n C_n$, где $C = A \times B$, $C_n = A_n \times B_n$, $A, A_n \in S_1$,

$B, B_n \in S_2$. Нам надо доказать, что $mC = \sum_n mC_n$. Если для некоторого n $mC_n = +\infty$, или если $\sum_k mC_k = +\infty$, то по теореме 2.3 тем более $mC = +\infty$, и доказывать нечего.

Пусть $\sum_k mC_k < +\infty$. Определим на множестве A функции

$$f_n(x) = \begin{cases} m_2(B_n), & x \in A_n \\ 0, x \notin A_n. \end{cases}$$

Зафиксируем точку $x \in A$. Множество тех x, для которых хотя бы одна из функций $f_n(x)$ бесконечна, есть объединение соответствующих A_n, то есть имеет меру нуль в силу условия $mC_n < \infty$. Пусть x не относится к таким. Заметим, что для каждого $y \in B$ $(x, y) \in C$, то есть найдется единственное такое n, что $(x, y) \in A_n \times B_n$. Поэтому

$$\bigsqcup_{n\,:\,x \in A_n} B_n = B.$$

Тогда в силу σ-аддитивности меры m_2 получим, что $\sum_n f_n(x) = m_2 B$ почти всюду на A. Но, с другой стороны,

$$\int_A f_n(x) d\mu_1 = m_1 A_n\, m_2 B_n.$$

Применяя к ряду с неотрицательными членами $\sum_n f_n(x)$ теорему Б. Леви (интегралы от частичных сумм равномерно ограничены в силу предположения $\sum_k mC_k < +\infty$), получим, что

$$\sum_n \int_A f_n(x) d\mu_1 = \int_A m_2 B d\mu_1 = \mu_1 A\, m_2 B = m_1 A\, m_2 B.$$

Подставляя одно в другое, получаем, что

$$mC = m_1 A\, m_2 B = \sum_n m_1 A_n\, m_2 B_n = \sum_n mC_n,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Поскольку прямое произведение σ-алгебр не является σ-алгеброй, то рассматривать интеграл Лебега по произведению мер нельзя. Поэтому вводится следующее понятие.

Определение. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — конечные или σ-конечные σ-аддитивные меры на σ-алгебрах S_k. Тогда их прямым произведением $\mu = m_1 \times \cdots \times m_n$ называется продолжение по Лебегу меры $m = m_1 \cdots m_n$, т.е. их определенного выше произведения.

Прямое произведение, как всякая мера Лебега, является полной σ-аддитивной мерой на σ-алгебре.

Теорема 7.2. *(Фубини, без доказательства) Пусть (X_j, M_j, μ_j), $j = 1, 2$ — измеримые пространства с полными мерами, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ — их прямое произведение, определенное на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ с единицей $X = X_1 \times X_2$. Пусть $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Тогда*

1. Функция $f(x, \cdot)$ измерима и интегрируема на X_2 по мере μ_2 при μ_1-почти всех $x \in X_1$.

2. Функция $I_f(x) = \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ (доопределенная произвольным образом на множестве меры нуль, где этот интеграл не существует) измерима на X_1 и интегрируема относительно меры μ_1.

3. Имеет место равенство

$$\int_X f(x, y)\, d\mu(x, y) = \int_{X_1} I_f(x)\, d\mu_1(x) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

Кратко это выражают следующим образом: из существования двойного интеграла следует существование повторного и их равенство.

Замечание. Из соображений симметрии ясно, что существует и другой повторный интеграл, который тоже равен двойному, в частности, при этом повторные интегралы равны. Но из существования повторных интегралов не следует их равенства, а даже если они равны, то отсюда не следует существования двойного интеграла.

Однако имеет место

Теорема 7.3. *(Тонелли) Пусть (X_j, M_j, μ_j), $j = 1, 2$ — измеримые пространства с полными мерами, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ — их прямое произведение, определенное на σ-алгебре $\mathfrak{M}$ с единицей $X = X_1 \times X_2$. Пусть функция f измерима на $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и существует конечный интеграл*

$$\int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} |f(x,y)|\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

Тогда $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Доказательство.

В силу свойств интеграла Лебега и измеримости f достаточно доказать утверждение для $|f|$, т.е. рассмотреть случай неотрицательной функции. Если $\mu_1 X_1 = +\infty$, то, пользуясь определением σ-конечной меры, выберем такие $X_{1,n} \in M_1$, что $\mu_1 X_{1,n} < +\infty$, $X_{1,n} \subset X_{1,n+1}$, $X_1 = \bigcup_n X_{1,n}$. Если же $\mu_1 X_1 < +\infty$, то положим $X_{1,n} = X_1$ при всех n. Аналогично построим исчерпание X_2 множествами $X_{2,n} \in M_2$, $\mu_2 X_{2,n} < +\infty$. Рассмотрим теперь функции

$$f_n(x,y) = \min\{f(x,y), n\} \cdot \chi_{X_{1,n}}(x) \cdot \chi_{X_{2,n}}(y).$$

Эти неотрицательные функции измеримы, отличны от нуля лишь на множестве конечной меры и ограничены (числом n), следовательно, каждая из них интегрируема на X, и по теореме Фубини

$$\int\limits_X f_n(x,y)\, d\mu(x,y) = \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f_n(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

При этом $f_n(x,y) \uparrow f(x,y)$ всюду. Так как $f_n(x) \leqslant f(x)$ всюду, то выполнены также оценки

$$\int\limits_X f_n(x,y)\, d\mu(x,y) \leqslant \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = K < \infty.$$

Таким образом, мы можем применить теорему Б. Леви и получить, что $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Теорема доказана.

Тема 8 : Пространства L_p.

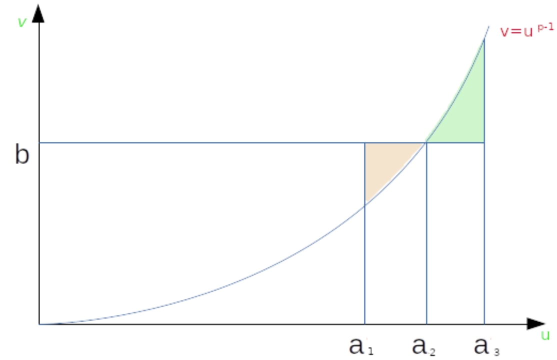
В этой теме мы рассмотрим пространства интегрируемых функций - одно из основных приложений теории интеграла Лебега в теории функций и функциональном анализе. Начнем с доказательства двух важных неравенств.

Неравенства Гельдера и Минковского

Лемма 8.1. *(Неравенство Юнга) Пусть числа $p > 1$ и $q > 1$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых $a, b \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказательство.
Заметим, что из $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ следует, что $p+q=pq$, откуда $pq-p-q+1=1$ и $(p-1)(q-1)=1$. Поэтому график функции $v=u^{p-1}$ является и графиком функции $u=v^{q-1}$, и из геометрических соображений для любых $a,b>0$ выполнено неравенство



$$ab \leqslant \int\limits_0^a u^{p-1}\,du + \int\limits_0^b v^{q-1}\,dv = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Действительно, первый интеграл есть площадь фигуры между графиком, осью абсцисс и прямой $u=a$, а второй — площадь фигуры между графиком, осью ординат и прямой $v=b$. При $b=a^{p-1}$ (случай $a=a_2$) объединение этих фигур равно прямоугольнику со сторонами a и b. При меньших a (случай $a=a_1$) объединение этих фигур больше прямоугольника (добавляется бежевая фигура), и при больших a (случай $a=a_3$) объединение этих фигур тоже больше прямоугольника (добавляется зеленая фигура).

Теорема 8.1. *(Неравенство Гельдера.) Пусть задано пространство с мерой (X,M,μ), а числа $p>1$ и $q>1$ таковы, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Пусть f и g – измеримые функции, причем функции $|f|^p$ и $|g|^q$ интегрируемы по Лебегу. Тогда функция fg интегрируема и*

$$\left|\int\limits_X f(x)g(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f(x)g(x)|\,d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_X |g(x)|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Доказательство.
Если выражение в правой части равно нулю, то это означает, что либо $f(x)=0$ п.в., либо $g(x)=0$ п.в. В том и в другом случае $f(x)g(x)=0$ п.в., и неравенство принимает вид $0\leqslant 0$. Пусть теперь правая часть неравенства отлична от нуля. Положим

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}, \qquad \|g\|_q = \left(\int\limits_X |g(x)|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Определим функции $\varphi(x)=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ и $\psi(x)=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$. По неравенству Юнга для любого x имеем

$$\varphi(x)\psi(x) \leqslant \frac{\varphi^p(x)}{p}+\frac{\psi^q(x)}{q}.$$

Проинтегрируем это неравенство по X и заметим, что

$$\int\limits_X \varphi^p(x)\,d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu = 1$$

и аналогично для функции ψ^q. Таким образом,

$$\int\limits_X \varphi(x)\psi(x)\,d\mu \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Возвращаясь к функциям f и g, получаем, что

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int\limits_X |f(x)g(x)|\,d\mu \leqslant 1,$$

и после домножения получаем неравенство Гельдера. Теорема доказана.

Теорема 8.2. *(Неравенство Минковского.) Пусть (X, M, μ) — пространство с мерой, $1 \leqslant p < \infty$, f и g – измеримые функции, причем $|f|^p$ и $|g|^p$ — суммируемые функции. Тогда $|f+g|^p$ — суммируемая функция и*

$$\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Доказательство.

При $p=1$ утверждение непосредственно следует из свойств интеграла Лебега. Пусть $p>1$. Отметим вначале, что

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Поэтому функция $|f(x)+g(x)|^p$ суммируема. Если она равна нулю п.в., то неравенство Минковского заведомо выполнено. Пусть эта функция не эквивалентна нулю. Заметим, что

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}.$$

Положим $q = p/(p-1)$, тогда пара (p,q) удовлетворяет условиям неравенства Гельдера. При этом функция $(|f(x)+g(x)|^{p-1})^q = |f(x)+g(x)|^p$ суммируема по доказанному. Применяя неравенство Гельдера, получаем:

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu\right)^{1/q} +$$
$$+ \left(\int\limits_X |g(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu\right)^{1/q}$$

Используя обозначение

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p},$$

перепишем это неравенство в виде

$$\|f+g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q}.$$

Но поскольку $p - \frac{p}{q} = p(1-\frac{1}{q}) = 1$, то, поделив на ненулевое число $\|f+g\|_p^{p/q}$, получаем неравенство Минковского. Теорема доказана.