Лекция по действительному анализу 30 марта 2020 года, мехмат, 2 курс, 2 поток.

Тема 5: Интеграл Лебега. Определение и основные свойства (продолжение)

Мы будем по-прежнему предполагать, что нам задана конечная или σ-конечная σ-аддитивная мера μ на σ-алгебре M с единицей X. Элементы M будем называть измеримыми множествами, а вещественнозначные $(M, \mathcal{B})$-измеримые функции — просто измеримыми.

Отметим еще некоторые элементарные свойства интеграла Лебега.

1. *Если f — измеримая функция, $|f(x)| \leqslant C$, $\mu X < \infty$, то f интегрируема, и*

$$\left| \int\limits_X f(x)\, d\mu \right| \leqslant C\mu X.$$

Действительно, любая не превосходящая f^+ или f^- простая функция ограничена той же величиной C. Пользуясь леммой 5.3 для простых функций на множествах, где f имеет определенный знак, и переходя к супремуму по простым фунциям, получаем оценки

$$\left| \int\limits_{\{x\,:\,f(x)>0\}} f^+(x)\, d\mu \right| \leqslant C\mu\{x\,:\,f(x) > 0\}, \quad \left| \int\limits_{\{x\,:\,f(x)<0\}} f^-(x)\, d\mu \right| \leqslant C\mu\{x\,:\,f(x) < 0\}.$$

Их сумма и определение интеграла Лебега дают искомую оценку.

2. *Если g интегрируема, f измерима и почти всюду на X выполнено условие $|f(x)| \leqslant g(x)$, то f интегрируема.*

Любая измеримая функция интегрируема на множестве меры нуль. Поэтому без ограничения общности $|f(x)| \leqslant g(x)$ всюду. Тогда для любой простой $h \in J(f^+)$ выполнено условие

$$\int\limits_X h(x)\, d\mu \leqslant \int\limits_X g(x)\, d\mu,$$

поэтому f^+ интегрируема. Аналогично f^- интегрируема.

3. *Если f измерима, то f и $|f|$ интегрируемы или не интегрируемы одновременно. В случае интегрируемости $\left| \int_X f(x)\, d\mu \right| \leqslant \int_X |f(x)|\, d\mu$.*

Если f интегрируема, то $|f| = f^+ + f^-$ интегрируема по лемме 5.9. Обратное следует из предыдущего свойства. Оценка следует из той же леммы.

4. *Для любой неотрицательной измеримой функции интеграл Лебега от неё неотрицателен. Если две интегрируемые функции связаны неравенством $f(x) \leqslant g(x)$, то*

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu \leqslant \int\limits_X g(x)\, d\mu.$$

.

Первое сразу следует из определения интеграла от неотрицательной измеримой функции; второе получается из первого применением теоремы 5.2.

Интеграл Лебега как функция множества.

Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X. Согласно следствию из леммы 5.9, система множеств $M_f \subseteq M$, на которых функция f интегрируема, является кольцом, а интеграл есть мера на этой системе. Докажем, что интеграл счетно-аддитивен.

Теорема 5.3. *Пусть A и A_n — измеримые множества, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, неотрицательная функция f измерима на A и при каждом n интегрируема на A_n. Тогда*

$$\int\limits_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f\,d\mu.$$

В частности, если ряд в правой части сходится, то f интегрируема на A.

Доказательство.

По следствию из леммы 5.9, любая частная сумма ряда в правой части не превосходит интеграла по всему A. В частности, если ряд расходится, то f не интегрируема на A. Пусть теперь ряд сходится. Докажем обратное неравенство. Рассмотрим произвольную функцию $h(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{E_k}(x) \in J(f)$. Тогда по лемме 5.5

$$\int\limits_A h(x)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} h(x)\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu.$$

Переходя в левой части к точной верхней грани по $h \in J(f)$, получаем требуемое.

Следствие. *Если A и A_n — измеримые множества, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, f интегрируема на A, то*

$$\int\limits_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f\,d\mu. \tag{\#}$$

Доказательство.

По теореме 5.3 равенство (#) верно для f^+ и f^-. Вычитая одно из другого, получаем равенство для f.

Следствие. *Если A и A_n — измеримые множества, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, измеримая f интегрируема на каждом A_n и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f|\,d\mu < \infty,$$

то f интегрируема на A.

Доказательство.

Утверждение непосредственно следует из теоремы 5.3, примененной к $|f|$, и свойства 3.

Лемма 5.11. *(Неравенство Чебышёва) Пусть f — неотрицательная интегрируемая функция на A. Тогда для любого $c > 0$*

$$\mu\{x \in A \,:\, f(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_A f(x)\,d\mu.$$

Доказательство.

Положим $A_c = \{x \in A \,:\, f(x) \geqslant c\}$ и $A'_c = A \setminus A_c$. Тогда по лемме 5.9 и свойству 4

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \int\limits_{A_c} f(x)\,d\mu + \int\limits_{A'_c} f(x)\,d\mu \geqslant \int\limits_{A_c} f(x)\,d\mu \geqslant \int\limits_{A_c} c\,d\mu = c\,\mu A_c.$$

Поделив левую и правую части на c, получим неравенство Чебышёва.

Теорема 5.4. *(Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.) Пусть функция f суммируема на A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольного измеримого $B \subseteq A$ с $\mu B < \delta$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_B |f(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство.

Если функция f ограничена, т.е. $|f(x)| \leqslant N$, то в силу свойства 2 достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$. В общем случае, положим $A_n = \{x \in A : n-1 \leqslant |f(x)| < n\}$. Тогда $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. По теореме 5.3

$$\int\limits_A |f(x)|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu.$$

В частности, ряд в правой части этого равенства сходится. Поэтому можно выбрать такое N, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$C_1 = \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n, \qquad C_2 = \bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} A_n = A \setminus C_1.$$

Тогда $|f(x)| \leqslant N$ на C_1. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$. Тогда для любого измеримого B с $\mu B < \delta$ получаем:

$$\int\limits_B |f(x)|\,d\mu \leqslant \int\limits_{B\cap C_1} |f(x)|\,d\mu + \int\limits_{B\cap C_2} |f(x)|\,d\mu \leqslant \int\limits_{B\cap C_1} N\,d\mu +$$
$$+ \int\limits_{C_2} |f(x)|\,d\mu \leqslant N\frac{\varepsilon}{2N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Тема 6: **Предельный переход под знаком интеграла Лебега**

Для интеграла Римана обычно доказывается следующая теорема о предельном переходе: если функции интегрируемы по Риману и равномерно сходятся на отрезке, то интегралы Римана от них сходятся к интегралу от предельной функции. Более слабые условия, например, поточечная сходимость, не гарантируют непрерывности предельной функции, а значит, и интегрируемости по Риману.

Для интеграла Лебега одной только поточечной сходимости, вообще говоря, тоже недостаточно. Хотя предельная функция обязана быть измеримой, но она может не быть интегрируемой или интегралы могут не сходиться к интегралу от предельной функции. Тем не менее, можно наложить дополнительные условия, которые значительно слабее свойства равномерной сходимости, но достаточны для предельного перехода. Для простоты будем считать меру полной.

Теорема 6.1.*(Теорема Лебега, или теорема о мажорируемой сходимости). Пусть f_n — измеримые функции на X, g — суммируемая функция на X, $f_n(x) \to f(x)$ п.в. на X и при каждом n $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ п.в. на X (g является мажорантой). Тогда предельная функция f интегрируема по Лебегу на X и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu.$$

Доказательство.

Прежде всего, f измерима как предел последовательности измеримых функций почти во всех точках. При этом $|f(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду, и по свойству 2 f интегрируема по Лебегу на X.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разбиение X на множества X_k конечной меры (если $\mu X < \infty$, то этот шаг пропускаем и полагаем $A_\varepsilon = X$). Так как по теореме 5.3

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} g(x)\, d\mu = \int\limits_X g(x)\, d\mu < \infty,$$

то найдется такое K, что

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \int\limits_{X_k} g(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Положим $A_\varepsilon = \bigsqcup_{k=1}^{K} X_k$, тогда $\mu A_\varepsilon < +\infty$, и по теореме 5.3

$$\int\limits_{X \setminus A_\varepsilon} g(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Далее, для любого n

$$\left| \int\limits_X f_n(x)\, d\mu - \int\limits_{A_\varepsilon} f_n(x)\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_{X \setminus A_\varepsilon} |f_n(x)|\, d\mu \leqslant \int\limits_{X \setminus A_\varepsilon} g(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6},$$

и аналогичное неравенство верно для f. Так как функция g интегрируема на A_ε, то по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега (теорема 5.4) найдется такое $\delta > 0$, что для любого множества $B \subset A_\varepsilon$ с $\mu B < \delta$ выполнено условие

$$\int\limits_B g(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Поскольку $\mu A_\varepsilon < +\infty$, то применима теорема Егорова, и найдется такое $B_\delta \subset A_\varepsilon$, что $\mu B_\delta < \delta$ и на $C_\varepsilon = A_\varepsilon \setminus B_\delta$ сходимость последовательности равномерна. Выберем такое N, что при $n > N$ всюду на C_ε выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(\mu C_\varepsilon + 1)}$.

Тогда при $n > N$ получаем оценки:

$$\left| \int\limits_X f(x)\, d\mu - \int\limits_X f_n(x)\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_{C_\varepsilon} |f(x) - f_n(x)|\, d\mu + \int\limits_{B_\delta} |f(x)|\, d\mu + \int\limits_{B_\delta} |f_n(x)|\, d\mu +$$

$$+ \int\limits_{X \setminus A_\varepsilon} |f_n(x)|\, d\mu + \int\limits_{X \setminus A_\varepsilon} |f(x)|\, d\mu \leqslant \mu C_\varepsilon \frac{\varepsilon}{3(\mu C_\varepsilon + 1)} + 2 \int\limits_{B_\delta} g(x)\, d\mu + 2 \int\limits_{X \setminus A_\varepsilon} g(x)\, d\mu < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема может быть использована не только для предельного перехода под знаком интеграла, но и для доказательства сходимости последовательности функций к конечному пределу.

Теорема 6.2. *(Теорема Беппо Леви, или теорема о монотонной сходимости.) Пусть f_n — интегрируемые на A функции, причем $f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$ почти всюду на A для всех k, и интегралы $\int_A f_n(x)\, d\mu$ ограничены некоторой величиной K. Тогда почти всюду существует конечный предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, функция $f(x)$ интегрируема, и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu = \int\limits_X f(x)\, d\mu.$$

Доказательство.
Рассмотрим сначала случай $f_n(x) \geqslant f_1(x) \geqslant 0$. Пусть $\Omega_n^r = \{x \,:\, f_n(x) > r\}$. Тогда по неравенству Чебышёва $\mu\Omega_n^r \leqslant \frac{K}{r}$. В силу монотонности последовательности $\Omega_n^r \subset \Omega_{n+1}^r$ при каждом r для всех n. Заметим, что

$$\Omega = \{x \,:\, f_n(x) \to \infty\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^r, \quad \text{где } \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^r \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{r+1}.$$

Дважды применяя свойство непрерывности меры, получаем, что

$$\mu\Omega = \lim_{r\to\infty} \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^r = \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu\Omega_n^r \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{K}{r} = 0,$$

то есть что $\mu\Omega = 0$. Таким образом, предельная функция $f(x)$ конечна почти всюду. Пренебрегая множеством меры нуль, будем считать, что f конечна всюду.

Положим $f_0(x) \equiv 0$. По лемме 5.2 построим неотрицательные простые функции $h_{k,i}(x) \uparrow (f_k(x) - f_{k-1}(x))$ при $i \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Определим простые функции $g_k(x) = \sum_{j=1}^{k} h_{j,k}(x)$. По построению $g_k(x) \leqslant g_{k+1}(x)$. Так как

$$g_k(x) \leqslant \sum_{j=1}^{k} (f_j(x) - f_{j-1}(x)) = f_k(x) \leqslant f(x),$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_A g_k(x)\, d\mu \leqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_A f_k(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Далее, для любого n при $k > n$ выполняется оценка

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) \geqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} h_{j,k}(x) = \sum_{j=1}^{n} \lim_{k\to\infty} h_{j,k}(x) = \sum_{j=1}^{n} (f_j(x) - f_{j-1}(x)) = f_n(x).$$

В силу произвольности n получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) \geqslant f(x)$, что вместе дает $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$. Согласно лемме 5.7,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_A g_k(x)\, d\mu = \int\limits_A f(x)\, d\mu.$$

Тогда f интегрируема, и, тем более

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_A f_k(x)\, d\mu = \int\limits_A f(x)\, d\mu.$$

Случай неотрицательных f_n тем самым доказан. Общий случай получается из него переходом к неотрицательным функциям $f_n(x) - f_1(x)$ по теореме 5.2.

Замечание. Теоремы Лебега и Б. Леви можно переформулировать в терминах почленного интегрирования рядов.

Следующая теорема не утверждает справедливость предельного перехода, но часто бывает полезна, так как накладывает более слабые условия, чем предыдущие теоремы.

Теорема 6.3. *(Теорема Фату, или лемма Фату.) Пусть $f_n(x)$ — неотрицательные интегрируемые функции на множестве A, причем $f_n(x) \to f(x)$ п.в. на A. Если интегралы $\int_A f_n(x)\, d\mu$ ограничены в совокупности, то f интегрируема на A и*

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\, d\mu.$$

Доказательство.
Переходя к подпоследовательности, можно считать, что указанный нижний предел есть предел всей последовательности интегралов. Определим функции $\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x)$. Тогда $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ всюду на A, а из неравенства $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$ следует, что все функции $\varphi_n(x)$ интегрируемы и

$$\int\limits_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \int\limits_A f_n(x)\, d\mu leq K.$$

Заметим, что если $f_n(x) \to f(x)$, то и $\varphi_n(x) \to f(x)$. Применяя к последовательности $\{\varphi_n\}$ теорему Б. Леви, получаем, что f интегрируема и

$$\int\limits_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\, d\mu.$$

Теорема доказана.

Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Рассмотрим классическую меру Лебега на отрезке. Напомним, что справедлив следующий *критерий Лебега интегрируемости по Риману:* функция интегрируема по Риману на отрезке тогда и только тогда, когда она непрерывна на этом отрезке всюду, кроме множества меры нуль, и ограничена.

Теорема 6.4. *Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда она интегрируема по Лебегу относительно классической меры и интегралы Римана и Лебега совпадают.*

Доказательство.
Пусть $T_n = \{(x_{n,k}, \xi_{n,k})\}_{k=1}^{k_n}$ — размеченные разбиения отрезка $[a, b]$, а их диаметры $\lambda(T_n)$ стремятся к нулю. Определим простые функции

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} f(\xi_{n,k}) \chi_{[x_{n,k-1}, x_{n,k})}(x).$$

По построению они измеримы и

$$(L) \int\limits_{[a,b]} f_n(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{k_n} f(\xi_{n,k}) \mu[x_{n,k-1}, x_{n,k}) = S(f, T_n).$$

Заметим, что для любой точки $x \in [a, b)$ имеет место равенство $f(x) - f_n(x) = f(x) - f(\xi_{n,k(x,n)})$, где $|x - \xi_{n,k(x,n)}| \leqslant \lambda(T_n)$. Таким образом, $f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке непрерывности, то есть, согласно критерию Лебега интегрируемости по Риману, почти всюду. Учитывая, что $\sup |f_n| \leqslant \sup |f| = C < \infty$, а $\mu[a, b] = b - a < \infty$, получаем, что можно применить теорему 6.1 (Лебега) с мажорантой $g(x) \equiv C$ и получить, что

$$(L) \int\limits_{[a,b]} f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} (L) \int\limits_{[a,b]} f_n(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} S(f, T_n) = (R) \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Теорема доказана.