Лекция по действительному анализу 23 марта 2020 года, мехмат, 2 курс, 2 поток.

Тема 5: Интеграл Лебега. Определение и основные свойства

В этой теме мы будем предполагать, что нам задана конечная или σ-конечная σ-аддитивная мера μ на σ-алгебре M с единицей X. Тройка (X, M, μ) называется измеримым пространством. Элементы M будем называть измеримыми множествами, а вещественнозначные $(M, \mathcal{B})$-измеримые функции — просто измеримыми.

Простые функции и интеграл Лебега от них.

Определение. Функция $f(x)$ называется простой (простейшей), если она имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x), \qquad (*)$$

где E_k — попарно непересекающиеся измеримые множества конечной меры. Формально можно разрешить некоторым из них иметь бесконечную меру, если соответствующие a_k равны нулю. Это удобно, поскольку некоторые рассуждения упрощаются, если считать, что $\bigsqcup_k E_k = X$.

Замечание. Функция $f(x)$ является простой тогда и только тогда, когда она измерима и принимает конечное множество значений, причем она отлична от нуля лишь на множестве конечной меры.

Действительно, пусть f принимает значения a_k на множествах E_k. Так как одноточечное множество является борелевским, то $E_k = f^{-1}(\{a_k\}) \in M$. При этом функция, очевидно, имеет необходимый вид и множества не пересекаются.

Обратно, если f имеет указанный вид, то она принимает лишь значения a_k и $a_0 = 0$. Последнее значение принимается на измеримом множестве $E_0 = X \setminus \bigcup_k E_k$. При этом для любого борелевского E

$$f^{-1}(E) = \bigcup_{a_k \in E} E_k \in M$$

как конечное объединение множеств из M.

Будем писать $a_n \uparrow a$, если $a_n \to a$ и при этом $a_n \leqslant a_{n+1}$ при всех n.

Лемма 5.1. *Для любой неотрицательной измеримой на X функции f существует такая последовательность простых функций $\{f_n\}$, что $f_n(x) \uparrow f(x)$ в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство.

В случае σ-конечной меры, подберем такие множества $X_n \in M$, что $X_n \subset X_{n+1}$, $\bigcup_n X_n = X$ и $\mu X_n < \infty$. Это можно сделать, взяв разбиение $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$ из определения σ-конечной меры и положив $X_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Для конечной меры, положим $X_n \equiv X$.

Рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}, & f(x) \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}), \quad x \in X_n, \quad k \leqslant 2^{2n} \text{ (т.е. } |f(x)| < 2^n), \\ 2^n, & f(x) \geqslant 2^n \text{ и } x \in X_n \\ 0, & x \notin X_n. \end{cases}$$

Функции f_n простые, так как принимают конечное число значений — часть из $\{\frac{k}{2^n}\}_{k=0}^{2^{2n}}$, а указанные множества измеримы в силу измеримости f и их меры конечны, т.к. не превосходят меры X_n. В то же время для любой точки из X по построению $f_n(x) \uparrow f(x)$.

Определение. Интегралом Лебега от простой функции f вида $(*)$ называется число

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu E_k.$$

Если в рассуждениях встречаются сразу несколько интегралов разных типов, перед интегралом Лебега можно поставить знак (L).

Прежде всего, проверим, что это определение корректно, то есть не зависит от представления функции в виде суммы. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{E_k}(x) = \sum_{j=1}^{J} b_j \chi_{F_j}(x),$$

где $\bigsqcup_k E_k = \bigsqcup_j F_j = X$. Поскольку значения функции f суть, с одной стороны, a_k, а с другой стороны, b_j, то $a_k = b_j$, как только $E_k \cap F_j \neq \varnothing$. Поэтому

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{K} a_k \mu E_k = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} a_k \mu(E_k \cap F_j) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum_{j=1}^{J} b_j \mu F_j,$$

то есть суммы равны.

Установим необходимые для дальнейшего свойства интегралов от простых функций.

Лемма 5.2. *Если f и g — простые функции, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то функция $\alpha f + \beta g$ — простая и*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f\,d\mu + \beta \int\limits_X g\,d\mu.$$

Доказательство.

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{E_k}(x), \qquad g(x) = \sum_{j=1}^{J} b_j \chi_{F_j}(x),$$

где $\bigsqcup_k E_k = \bigsqcup_j F_j = X$. Положим $B_{k,j} = E_k \cap F_j$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} a_k \chi_{B_{k,j}}(x), \qquad g(x) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} b_j \chi_{B_{k,j}}(x).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (\alpha a_k + \beta b_j) \chi_{B_{k,j}}(x).$$

и это простая функция по определению. Тогда

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (\alpha a_k + \beta b_j) \mu B_{k,j} = \alpha \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} a_k \mu B_{k,j} + \beta \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_j \mu B_{k,j}.$$

В силу двух предыдущих формул слева здесь стоит интеграл от линейной комбинации, а справа — линейная комбинация интегралов. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Для любой простой функции*

$$\left| \int\limits_X f(x)\,d\mu \right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\,d\mu.$$

Если простая функция ограничена величиной M, и $\mu X < \infty$, то

$$\left| \int\limits_X f(x)\,d\mu \right| \leqslant M \mu X.$$

Доказательство.
Первое утверждение немедленно следует из того, что модуль суммы не превосходит суммы модулей, а второе — из оценки

$$\sum_{k=1}^{K} |a_k| \mu E_k \leqslant M \sum_{k=1}^{K} \mu E_k \leqslant M \mu X.$$

Лемма 5.4. *Для любых простых функций $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \leqslant h(x)$ выполнено*

$$\int_X f(x)\, d\mu \geqslant 0, \qquad \int_X g(x)\, d\mu \leqslant \int_X h(x)\, d\mu.$$

Доказательство.
Первое утверждение немедленно следует из определения простой функции. Второе вытекает из первого и леммы 5.2 о линейности интеграла.

Определение. Интегралом от простой функции $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k \chi_{E_k}(x)$ по произвольному множеству $A \in M$ называется величина

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{K} a_k \mu(E_k \cap A).$$

Поскольку его можно рассматривать как интеграл по единице суженной σ-алгебры $M|_A$, то все перечисленные свойства сохраняются.

Лемма 5.5. *Пусть f — простая, $A = \bigsqcup_j A_j$ — конечное или счетное объединение. Тогда*

$$\int_A f\, d\mu = \sum_j \int_{A_j} f\, d\mu.$$

Доказательство.
Лемма следует из определений интеграла от простой функции и σ-аддитивной меры:

$$\int_A \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_j a_k \mu(E_k \cap A_j) = \sum_j \int_{A_j} \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}\, d\mu.$$

Теорема 5.1. *Пусть функции g и g_n — простые неотрицательные, последовательность $\{g_n(x)\}$ — неубывающая в каждой точке и $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \geqslant g(x)$ в каждой точке. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\, d\mu \geqslant \int_X g(x)\, d\mu.$$

Доказательство.
Если предел интегралов бесконечен, то утверждение тривиально. Пусть этот предел конечен. Рассмотрим функцию g, пусть она имеет вид

$$g(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x).$$

где $0 < a_1 < \dots < a_m$. Пусть $\varepsilon \in (0, a_1)$. Введем множество $F = \{x : g(x) > 0\}$, $F_n = \{x \in F : g_n(x) < g(x) - \varepsilon\}$. Поскольку $F = \bigsqcup_{k=1}^m E_k$, то по определению простой функции $\mu F < \infty$. Тогда в силу монотонности последовательности функций

$$F \supset F_1 \supset F_2 \dots \supset F_n \supset \dots,$$

и так как в каждой точке предел $\{g_n(x)\}$ не меньше, чем $g(x)$, то $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \varnothing$, откуда по свойству непрерывности меры сверху получаем, что $\mu F_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по лемме 5.5 при каждом n

$$\int\limits_X g(x)\,d\mu = \int\limits_{F_n} g(x)\,d\mu + \int\limits_{F\setminus F_n} g(x)\,d\mu \leqslant a_m \mu F_n + \int\limits_{F_n} (g_n(x) + \varepsilon)\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant a_m \mu F_n + \int\limits_F g_n(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(F) \leqslant a_m \mu F_n + \int\limits_X g_n(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(F).$$

С увеличением n первое слагаемое стремится к нулю, а второе — к пределу интегралов. Третье же можно заранее сделать сколь угодно малым, уменьшая ε. Теорема доказана.

Общее определение интеграла Лебега

Определение. Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X. Введем множество $J(f) = \{h : h - \text{простая}, \forall x \in X\ 0 \leqslant h(x) \leqslant f(x)\}$.

Интегралом Лебега от f по множеству X называется

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sup_{h \in J(f)} \int\limits_X h(x)\,d\mu.$$

Если эта величина конечна, то функция f называется интегрируемой (суммируемой) по Лебегу на X.

Определение. Пусть f — измеримая функция на X. Введем функции

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ и } f^-(x) = -\min\{f(x), 0\},$$

которые называются положительной и отрицательной частями f соответственно. По построению эти функции неотрицательны.

Функция f называется интегрируемой (суммируемой) по Лебегу на X, если обе функции f^+ и f^- интегрируемы по Лебегу. Интегралом Лебега от f по множеству X называется величина

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \int\limits_X f^+(x)\,d\mu - \int\limits_X f^-(x)\,d\mu.$$

Если же задано множество $E \in M$, то интеграл по E можно определять либо через сужение σ-алгебры, либо по формуле

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\chi_E(x)\,d\mu.$$

Эти определения равносильны, мы будем пользоваться тем, которое нам в конкретном случае удобнее. Нетрудно видеть, что если измеримая функция интегрируема на множестве, то она интегрируема на любом его измеримом подмножестве.

Лемма 5.6. *Для простой функции определения интеграла Лебега согласованы. Для измеримой неотрицательной функции определения интеграла Лебега согласованы.*

Доказательство.

Для неотрицательной простой функции f утверждение следует из второй части леммы 5.4 (об интегрировании неравенств), ведь $f \in J(f)$. Поэтому в общем случае интегралы от положительной и отрицательной части в обоих смыслах совпадают, а тогда по лемме 5.2 о линейности совпадает значение интеграла от функции. Для измеримой неотрицательной функции f по определению $f^+ = f$, $f^- = 0$, поэтому противоречия между определениями не возникает.

Лемма 5.7. *Если $\{g_n(x)\}$ — неубывающая последовательность простых неотрицательных функций, сходящаяся в каждой точке к конечному пределу $f(x)$, то*

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu.$$

Доказательство.

Функция f неотрицательна и измерима как предел неотрицательных измеримых. Для каждой функции g_n интеграл от нее не превосходит интеграла от f по определению множества $J(f)$. Поэтому

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu \geqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu.$$

С другой стороны, если $g \in J(f)$, то функции g и $\{g_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы 5.1. Из этой теоремы следует оценка

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu \geqslant \int\limits_X g(x)\,d\mu.$$

Переходя в правой части к sup по $g \in J(f)$, получаем обратное неравенство.

Лемма 5.8. *Если $\mu E = 0$, функция f измерима (в случае полной меры второе условие следует из первого), то f интегрируема и $\int_E f\,d\mu = 0$.*

Доказательство.

Для простой функции утверждение тривиально. Для положительной и отрицательной частей измеримой, следовательно, интеграл равен супремуму нулей, то есть нулю.

Лемма 5.9. *Если f и g — неотрицательные измеримые функции на X, $\alpha, \beta > 0$, то*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f\,d\mu + \beta \int\limits_X g\,d\mu.$$

Если f — неотрицательная измеримая функция на $X = A \sqcup B$, то

$$\int\limits_X f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_B g\,d\mu.$$

Доказательство.

Построим простые $f_n \uparrow f$ и $g_n \uparrow g$. Тогда $\alpha f_n + \beta g_n \uparrow \alpha f + \beta g$. По лемме 5.3 имеем

$$\int\limits_X (\alpha f_n + \beta g_n)\,d\mu = \alpha \int\limits_X f_n\,d\mu + \beta \int\limits_X g_n\,d\mu.$$

Переходя к пределу в обеих его частях, по лемме 5.7 получим первое утверждение леммы. Аналогично предельным переходом из леммы 5.5 получается второе утверждение.

Следствие. *Если измеримая функция f интегрируема на конечном числе множеств $A_k \in M$, то она интегрируема на их объединении.*

Доказательство.

Достаточно рассмотреть случай непересекающихся A_k. Тогда интеграл от положительной (отрицательной) части f конечен как сумма конечного числа конечных слагаемых.

Лемма 5.10. *Если f — суммируемая функция на X и $\alpha \in \mathbb{R}$, то αf суммируема и*

$$\int\limits_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int\limits_X f\, d\mu.$$

Доказательство.

При $\alpha = 0$ утверждение тривиально. Заметим, что если $\alpha > 0$, то $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, а если $\alpha < 0$, то $(\alpha f)^+ = |\alpha| f^-$, $(\alpha f)^- = |\alpha| f^+$. Применяя к $(\alpha f)^+$ и $(\alpha f)^-$ лемму 5.9, сразу получим требуемое при $\alpha > 0$, а при $\alpha < 0$ имеем

$$\int\limits_X \alpha f\, d\mu = \int\limits_X (\alpha f)^+\, d\mu - \int\limits_X (\alpha f)^-\, d\mu = \int\limits_X |\alpha| f^-\, d\mu - \int\limits_X |\alpha| f^+\, d\mu =$$

$$= |\alpha| \left(\int\limits_X f^-\, d\mu - \int\limits_X f^+\, d\mu \right) = \alpha \int\limits_X f\, d\mu.$$

Теорема 5.2. *Если f и g — суммируемые функции на X и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ суммируема и*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int\limits_X f\, d\mu + \beta \int\limits_X g\, d\mu.$$

Доказательство.

В силу леммы 5.10 достаточно рассмотреть случай $\alpha = \beta = 1$. Пользуясь второй частью леммы 5.9, разобьем X на множества, где f и g принимают определенный знак. Если знаки совпадают или одна из функций равна нулю, то на таком множестве равенство следует из первой части леммы 5.9 и из леммы 5.10. Рассмотрим, например, $E = \{x : f(x) > 0, g(x) < 0\}$. Оно делится на две части: $E_1 = \{x \in E : f(x) + g(x) \geqslant 0\}$ и $E_2 = \{x \in E : f(x) + g(x) < 0\}$. На E_1 по лемме 5.9 и имеем

$$\int\limits_{E_1} f\, d\mu = \int\limits_{E_1} (f + g)\, d\mu + \int\limits_{E_1} (-g)\, d\mu,$$

откуда по лемме 5.10

$$\int\limits_{E_1} (f + g)\, d\mu = \int\limits_{E_1} f\, d\mu - \int\limits_{E_1} (-g)\, d\mu = \int\limits_{E_1} f\, d\mu + \int\limits_{E_1} g\, d\mu$$

На E_2 по леммам 5.9 и 5.10 имеем

$$\int\limits_{E_2} (-g)\, d\mu = \int\limits_{E_2} f\, d\mu + \int\limits_{E_2} -(f + g)\, d\mu$$

и далее аналогично. Перегруппировывая слагаемые и складывая по множествам, получаем утверждение теоремы.