Материалы к лекции №13, 14 мая 2020 года (часть 1)

Напоминание. Часть доказательств утверждений, встречающихся в тексте, может не приводиться здесь и содержится в книге

[ДС] А.В.Домрин, А.Г.Сергеев. Лекции по комплексному анализу (части 1 и 2), Москва, МИАН, 2004 г.

Книга разделена на две части. Их электронные версии доступны по ссылкам:

`mi-ras.ru/books/pdf/ser1.pdf`

`mi-ras.ru/books/pdf/ser2.pdf`

Изложение материала в целом следует тексту этой книги.

1 Первообразная голоморфной функции в неодносвязной области

1.1 Примеры

Напомним, что если D — произвольная область в $\mathbb{C}$ и f — голоморфная функция в D, то *первообразная* функции f в области D — это такая голоморфная в D функция F, что $F'(z) = f(z)$ всюду в D. Первообразная данной функции в области единственна с точностью до аддитивной константы (если существует). Как мы доказывали в прошлом семестре, если D — односвязная область в $\mathbb{C}$, то любая голоморфная в D функция f имеет первообразную в D, причем ее можно задать явной формулой («интеграл с переменным верхним пределом»): если a — фиксированная точка в D, то функция

$$F(z) := \int\limits_{\gamma} f(\zeta) d\zeta, \tag{1}$$

где γ — любой кусочно гладкий путь в D с началом a и концом z, является первообразной для f в D. В силу односвязности области значение интеграла не зависит от выбора пути γ.

Если область D неодносвязна, то голоморфная в области D функция может и не иметь первообразной в этой области. Например, функция $f(z) = \dfrac{1}{z}$ не имеет первообразной в области $D_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$: действительно, если предположить, что функция F — первообразная для f в D, то для любого кусочно гладкого пути γ с носителем в D_0, начинающегося в точке a и кончающегося в точке b, получим:

$$\int\limits_{\gamma} f(z) dz = F(b) - F(a).$$

В частности, если путь γ замкнут, то $b = a$ и интеграл равен нулю. Однако, как мы знаем,

$$\int\limits_{\{|z|=1\}^+} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

В то же время функция $\frac{1}{z^2}$ имеет первообразную в D, равную $-\frac{1}{z}$.

Упражнение. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ — ее ряд Лорана в кольце $\{0 < |z| < \infty\}$. Тогда функция f имеет (голоморфную) первообразную в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда $c_{-1} = 0$.

В рассмотренном выше примере функции $f(z) = \frac{1}{z}$ в области $D_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ формула (1) задает многозначную функцию (понимаемую наивно), поскольку значение интеграла зависит от выбора пути. С другой стороны, мы уже знаем, что многозначная аналитическая функция $\mathcal{F}(z) := \operatorname{Ln} z$ в области D_0 обладает тем свойством, что $\mathcal{F}'(z) = \frac{1}{z}$ (если рассматривать функцию справа как аналитическую, то есть как совокупность канонических элементов; см. подробнее далее). Оказывается, для любой голоморфной функции f в любой неодносвязной области D всегда существует (и единственна с точностью до аддитивной константы) аналитическая функция $\mathcal{F}$ в области D такая, что $\mathcal{F}'(z) = f(z)$. Аналитическую функцию $\mathcal{F}$ естественно назвать первообразной для функции f в области D. Если F — голоморфная ветвь аналитической функции $\mathcal{F}$ в подобласти $D_1 \subset D$, то F — первообразная «в обычном смысле» для функции f в D_1.

1.2 Существование первообразной для голоморфной функции в неодносвязной области

Утверждение. Пусть D — произвольная область в $\mathbb{C}$. Пусть f — голоморфная функция в D. Тогда существует аналитическая функция $\mathcal{F}$ в области D такая, что $\mathcal{F}'(z) = f(z)$ в смысле аналитических функций в области D. Функция $\mathcal{F}$ единственна с точностью до аддитивной константы, то есть если $\tilde{\mathcal{F}}$ — другая такая функция, то $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} + C$ для некоторого $C \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $a \in D$ — произвольная точка. Функция f голоморфна в окрестности точки a и разлагается в ряд Тейлора в точке a. Обозначим через $\mathbf{f}_a$ канонический элемент, порождаемый этим рядом: $\mathbf{f}_a := (U_a, f_a)$, где U_a есть круг сходимости полученного ряда Тейлора, а f_a — сумма этого ряда. Очевидно, радиус круга U_a не меньше расстояния от точки a до ∂D. (Вообще говоря, он может быть и больше, то есть круг U_a не обязан целиком лежать в области D. Однако при всех $z \in U_a \cap D$ выполнено равенство $f_a(z) = f(z)$.) Канонические элементы $\mathbf{f}_a$ составляют аналитическую функцию, соответствующую голоморфной функции f в том смысле, который объяснялся в лекции №8 9 апреля (пункт 1.2).

Обозначим через $\mathbf{F}_a$ канонический элемент (U_a, F_a), где F_a — это такакя первообразная функции f_a в круге U_a, что $F_a(a) = 0$. (Иными словами, $F_a(z) := \int\limits_{[a;z]} f_a(\zeta)d\zeta$.)

Мы покажем, что любой канонический элемент $\mathbf{F}_a$ можно продолжить вдоль любого непрерывного пути в D, выходящего из точки a. Тогда результаты его продолжения по всевозможным путям в области D зададут аналитическую функцию в области D.

Пусть $\gamma : [0; 1] \to D$ — путь (вообще говоря, только непрерывный) такой, что $\gamma(0) = a$. Семейство элементов Φ_t, продолжающее элемент $\mathbf{F}_a$ вдоль пути γ, мы будем строить в виде

$\Phi_t = (U_{\gamma(t)}, F_{\gamma(t)}(z) + c(t))$, где при каждом t величина $c(t)$ — некоторая константа. Иными словами, $\Phi_t = \mathbf{F}_{\gamma(t)} + c(t)$, где $c : [0;1] \to \mathbb{C}$ — некоторая функция.

Пусть $d := \min\{1; dist([\gamma], \partial D)\}$. Тогда радиусы всех кругов $U_{\gamma(t)}$ не меньше d. В силу равномерной непрерывности функции γ на отрезке $[0;1]$ существует такое число $\delta > 0$, что если $t', t'' \in [0;1]$ и $|t' - t''| < \delta$, то $|\gamma(t') - \gamma(t'')| < d$. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ — разбиение отрезка $[0;1]$ на интервалы длины, меньшей δ. Тогда каждый круг $U_{\gamma(t_j)}$ при $j = 0, 1, \ldots, n$ содержит носитель отрезка пути γ вида $\gamma|_{[t_j;t_{j+1}]}$.

Определим последовательно константы C_0, C_1, ..., C_n, полагая $C_0 := 0$ и

$$C_{j+1} := F_{\gamma(t_j)}(\gamma(t_{j+1})) + C_j.$$

Пусть $\tilde{F}_j := F_{\gamma(t_j)} + C_j$ при всех $j = 0, \ldots, n$. Тогда при $j = 0, \ldots, n-1$ выполняется равенство

$$\tilde{F}_j(\gamma(t_{j+1}) = \tilde{F}_{j+1}(\gamma(t_{j+1})). \tag{2}$$

Теперь для каждого $j = 0, \ldots, n-1$ при $t \in [t_j; t_{j+1}]$ положим $c(t) := \tilde{F}_j(\gamma(t))$. Равенство (2) показывает, что так определенная функция $c(t)$ будет корректно определена в общих концах соседних отрезков (в точках t_j), а значит, непрерывна на всем отрезке $[0;1]$. Можно заметить, что $c(t_j) = C_j$ при всех $j = 0, 1, \ldots, n$.

Покажем, что семейство элементов $\Phi_t := \mathbf{F}_{\gamma(t)} + c(t)$ действительно осуществляет продолжение элемента $\mathbf{F}_a$ вдоль пути γ. Для этого мы покажем, что при каждом $j = 0, \ldots, n-1$ семейство $\{\Phi_t, t \in [t_j; t_{j+1}]\}$ является аналитическим продолжением элемента $\Phi_{t_j} = (U_{\gamma(t_j)}, \tilde{F}_j)$ вдоль пути $\gamma|_{[t_j;t_{j+1}]}$. Поскольку при всех $t \in [t_j; t_{j+1}]$ точка $\gamma(t)$ лежит в круге U_{t_j}, мы можем рассмотреть канонический элемент $\Psi_t = (V_t, \psi_t)$, порожденный функцией $\tilde{F}_j$ элемента Φ_{t_j} (голоморфной в круге $U_{\gamma(t_j)}$) в точке $\gamma(t)$ (то есть взять в качестве круга V_t круг сходимости ряда Тейлора функции $\tilde{F}_j$ в точке $\gamma(t)$, а в качестве функции ψ_t — сумму этого ряда Тейлора). Элементы Φ_t и Ψ_t имеют одинаковый центр $\gamma(t)$. Значения их функций в центре совпадают: $F_{\gamma(t)}(\gamma(t)) + c(t) = c(t) = \tilde{F}_j(\gamma(t)) = \psi_t(\gamma(t))$. Кроме того, функции элементов Φ_t и Ψ_t в достаточно малой окрестности точки $\gamma(t)$ являются первообразными для исходной функции f (это следует из того, что $\big(F_{\gamma(t)}(z) + c(t)\big)' = f_{\gamma(t)}(z)$ в круге $U_{\gamma(t)}$, функции ψ_t и $\tilde{F}_j$ совпадают на пересечении кругов $V_t \cap U_{\gamma(t_j)}$, содержащем точку $\gamma(t)$, а $(\tilde{F}_j(z))' = F'_{\gamma(t_j)}(z) = f_{t_j}(z)$ в круге U_{t_j}). Поэтому функции элементов Φ_t и Ψ_t совпадают в достаточно малой окрестности точки $\gamma(t)$, а поскольку оба эти элемента канонические, то $\Phi_t = \Psi_t$. При всех $t \in [t_j, t_{j+1}]$ элемент Ψ_t по построению является непосредственным аналитическим продолжением элемента $\Phi_{\gamma(t_j)}$, а центр $\gamma(t)$ элемента Ψ_t лежит в круге $U_{\gamma(t_j)}$ элемента $\Phi_{\gamma(t_j)}$ и поэтому продолжение элемента $\Phi_{\gamma(t_j)}$ по любому пути из точки $\gamma(t_j)$ в точку $\gamma(t)$, носитель которого целиком лежит в круге $U_{\gamma(t_j)}$, дает Ψ_t. Поэтому семейство элементов $\{\Phi_t = \Psi_t, t \in [t_j; t_{j+1}]\}$ действительно является аналитическим продолжением элемента $\Phi_{t_j} = (U_{\gamma(t_j)}, \tilde{F}_j)$ вдоль пути $\gamma|_{[t_j;t_{j+1}]}$.

Итак, канонический элемент $\mathbf{F}_a$ можно продолжить вдоль любого непрерывного пути в D, выходящего из точки a, и поэтому он определяет аналитическую функцию $\mathcal{F}$ в области D. Из конструкции продолжения ясно, что любой элемент этой функции в любой точке $b \in D$ имеет вид $\mathbf{F}_b + const$ и потому его производная дает элемент $\mathbf{f}_b$. Значит, $\mathcal{F}' = f$ в смысле аналитических функций в области D.

Наконец, пусть $\mathcal{G}$ — другая аналитическая функция в области D такая, что $\mathcal{G}' = f$ в D. Рассмотрим какой-нибудь элемент $\mathbf{G}_a = (W_a, G_a)$ этой функции в точке a. По условию $\mathbf{G}'_a = \mathbf{f}_a$. Тогда $W_a = U_a$ (поскольку радиусы сходимости степенного ряда и его производной всегда совпадают) и $G'_a(z) = f_a(z) = F'_a(z)$ всюду в круге U_a, откуда $G_a(z) \equiv F_a(z) + C_a$ для некоторой константы $C_a \in \mathbb{C}$, а значит, $\mathbf{G}_a = \mathbf{F}_a + C_a$, а поскольку аналитическая функция $\mathcal{G}$ состоит из результатов продолжения элемента $\mathbf{G}_a$ по всевозможным путям из точки a в области D, то $\mathcal{G} = \mathcal{F} + C_a$ в смысле аналитических функций.

□

Смысл функции $c(t)$, возникающей в доказательстве утверждения, проясняется в случае, когда путь γ кусочно гладкий.

Предложение 1. Пусть в условиях утверждения и обозначениях, введенных при его доказательстве, путь $\gamma : [0;1] \to D$ кусочно гладкий. Тогда при всех $t \in [0;1]$

$$c(t) = \int\limits_{\gamma|_{[0;t]}} f(z)dz.$$

Доказательство. Пусть $t \in [t_j; t_{j+1}]$ для некоторого $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тогда

$$c(t) = \tilde{F}_j(\gamma(t)) = F_{\gamma(t_j)}(\gamma(t)) + C_j = \int\limits_{[\gamma(t_j);\gamma(t)]} f_{t_j}(z)dz + C_j.$$

Поскольку отрезок пути $\gamma|_{[t_j;t]}$ лежит в круге $U_{\gamma(t_j)}$, то интегралы голоморфной функции $f_{\gamma(t_j)}$ по пути $\gamma|_{[t_j;t]}$ и по отрезку $[\gamma(t_j);\gamma(t)]$ с теми же концами совпадают (эти два пути гомотопны друг другу в круге $U_{\gamma(t_j)}$). Поскольку путь γ целиком лежит в D, то в его точках, попавших в круг $U_{\gamma(t_j)}$, значения функций $f_{\gamma(t_j)}$ и f совпадают. Поэтому $c(t) = \int\limits_{\gamma|_{[t_j;t]}} f(z)dz + C_j$. В частности, $C_{j+1} = c(t_{j+1}) = \int\limits_{\gamma|_{[t_j;t_{j+1}]}} f(z)dz + C_j$. Вспоминая теперь, что $C_0 = 0$, мы последовательно получаем, что

$$C_{j+1} = \int\limits_{\gamma|_{[0;t_{j+1}]}} f(z)dz$$

при $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Значит, если $t \in [t_j; t_{j+1}]$, то

$$c(t) = \int\limits_{\gamma|_{[t_j;t]}} f(z)dz + C_j = \int\limits_{\gamma|_{[t_j;t]}} f(z)dz + \int\limits_{\gamma|_{[0;t_j]}} f(z)dz = \int\limits_{\gamma|_{[0;t]}} f(z)dz,$$

что и требовалось.

□

Поскольку результат продолжения элемента $\mathbf{F}_a$ по кусочно гладкому пути $\gamma : [0;1]$, выходящему из точки $a \in D$ и заканчивающемуся в точке $b \in D$, записывается как $\mathbf{F}_b + c(1)$, где функция $c(t)$ определена выше, то значение функции этого результата в его центре (то есть точке b) равно $c(1) = \int_\gamma f(z)dz$. Поэтому приведенная конструкция в определенном смысле обобщает формулу (1) для первообразной голоморфной функции в односвязной области.

Замечание 1. Функция $c(t)$ называется первообразной от функции f вдоль пути γ. Другое ее определение и доказательство существования приведено в [ДС] (ч.1, п.4.5 в лекции 4.)

1.3 Условие существования однозначной первообразной

Как следует из рассуждений, приведенных в первом пункте этого текста для случая функции $1/z$, условие равенства нулю интеграла $\int_\gamma f(z)dz$ для любого кусочно гладкого замкнутого пути γ в области D является необходимым для существования голоморфной первообразной функции f в области D. С другой стороны, как мы установили, аналитическая первообразная существует всегда. Значит, голоморфная первообразная существует тогда и только тогда, когда аналитическая первообразная является однозначной функцией. Пусть a — фиксированная точка области D. Результат продолжения элемента $\mathbf{F}_a$ по замкнутому (непрерывному) пути γ, выходящему из точки a и кончающемуся в ней же, есть элемент вида $\mathbf{F}_a + c(1)$, где функция $c(t)$ определяется как в доказательстве утверждения. Аналитическая первообразная $\mathcal{F}$ будет однозначной тогда и только тогда, когда $c(1) = 0$ для всех путей γ. Примем без доказательства интуитивно очевидное утверждение о том, что для любого замкнутого пути γ, выходящего из точки a и кончающегося в ней же, существует гомотопный ему в области D кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma}$ (гомотопия в смысле путей с закрепленными концами). Тогда по теореме о продолжении по гомотопным путям результаты продолжения элемента $\mathbf{F}_a$ по путям γ и $\tilde{\gamma}$ совпадают, а значит, величины $c(1)$ для путей γ и $\tilde{\gamma}$ равны. Но для пути $\tilde{\gamma}$ величина $c(1)$ есть просто интеграл функции f по пути $\tilde{\gamma}$. Поэтому верно следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и функция f голоморфна в $\mathbb{C}$. Функция f имеет голоморфную первообразную в области D если и только если ее интеграл по любому замкнутому кусочно гладкому пути в области D равен нулю. (Последнее условие достаточно проверять только для путей, начинающихся и кончающихся в фиксированной точке области D.)

Замечание 2. Построенная нами аналитическая функция $\mathcal{F}$ порождается любым своим элементом в данной точке a (имеющим вид $\mathbf{F}_a + c(1)$.) Поэтому, например, справедливо равенство аналитических функций $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} z + 2\pi i$ в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.